Sur la stabilité de la loi normale

Erik Thomas*

Résumé

Dans cette note, nous donnons une nouvelle preuve d'un résultat classique de probabilité : la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales, suit une loi normale.

1 Introduction

Dans cette note, nous retrouvons un résultat classique de probabilité, mais néanmoins fondamental : la somme de deux variables aléatoires indépendates suivant une loi normale, suit une loi normale. Plus précisément :

Proposition 1.1. *Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires définies sur un univers $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ indépendantes. On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Alors, $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$.*

L'approche classique de ce résultat est de remarquer que le produit de convolution de deux gaussiennes reste une gaussienne.

Notre approche est moins calculatoire et découle du théorème central limite. Nous renvoyons à [2] pour un énoncé et une preuve. Nous utiliserons aussi le résultat suivant dû à Skorokhod.

Théorème 1.1. *Théorème de représentation de Skorokhod*

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace polonais (espace métrique séparable complet) qui converge en loi vers une variable aléatoire Y.

Il existe un univers probabilisé $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$ et une suite de variables aléatoires $\left(\widehat{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$, avec $\mathrm{Loi}\left(\widehat{Y_n}\right) = \mathrm{Loi}(Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui converge presque-sûrement vers une variable aléatoire $\widehat{Y}$ définie sur $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$, avec $\mathrm{Loi}\left(\widehat{Y}\right) = \mathrm{Loi}(Y)$.

Nous renvoyons à [1] pour une preuve de ce théorème.

2 Preuve du résultat principal

Dans cette partie, nous prouvons la proposition 1.1.

Démonstration. Soient $X_1 \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu_2, \sigma_2)$ indépendantes. Pour éviter d'alourdir les notations, on suppose que $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Soient

$$S_n^1 := 2 \times \frac{X_1 + X_3 + \cdots + X_{2n-1} - n/2}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad S_n^2 := 2 \times \frac{X_0 + X_2 + \cdots + X_{2n-2} - n/2}{\sqrt{n}}.$$

On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables S_n^1 et S_n^2 sont indépendantes. Par le théorème central limite, les variables $\left(S_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(S_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent en loi vers X_1 et X_2.

Soit $Z_n := \left(S_n^1, S_n^2\right)$. Par indépendance de S_n^1 et S_n^2, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $Z := (X_1, X_2)$.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

$\mathbb{R}^2$ étant un espace polonais, d'après le théorème de Skorokhod, il existe un espace probabilisé $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$, une suite de variables aléatoires $\left(\widehat{Z_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$, avec Loi $\left(\widehat{Z_n}\right) = \text{Loi}\,(Z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et une variable aléatoire $\widehat{Z}$ définie sur $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$ avec Loi $\left(\widehat{Z}\right) = \text{Loi}\,(Z)$ tels que $\left(\widehat{Z_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\left(\widehat{S_n^1}, \widehat{S_n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers $\widehat{Z} := \left(\widehat{X_1}, \widehat{X_2}\right)$. En particulier, $\left(\widehat{S_n^1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\widehat{S_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent presque-sûrement respectivement vers $\widehat{X_1}$ et $\widehat{X_2}$ et $\left(\widehat{S_n^1} + \widehat{S_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement, donc en loi, vers $\widehat{X_1} + \widehat{X_2}$.

Or, le théorème central limite assure que $\left(\widehat{S_n^1} + \widehat{S_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance 2.

Ainsi, $\widehat{X_1} + \widehat{X_2} \hookrightarrow \mathscr{N}\left(0, \sqrt{2}\right)$, ce qui termine la preuve.

$\square$

Références

[1] G. Miermont, `http://perso.ens-lyon.fr/gregory.miermont/thlim.pdf`.

[2] D. Revuz, *Probabilités*. Hermann, 1997.