Sur la stabilité de la loi de Poisson

Erik Thomas*

Résumé

Dans cette note, nous retrouvons un résultat classique de probabilité : la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivent des lois de Poisson, suit une loi de Poisson.

Notre approche utilise un théorème de passage à la limite et le théorème de représentation de Skorokhod.

1 Introduction

Dans cette note, nous retrouvons le résultat élémentaire suivant de probabilité :

Proposition 1.1. *Somme de lois de Poisson indépendantes.*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui suivent respectivement des lois de Poisson de paramètres λ et μ.

Alors, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

La preuve « usuelle » de ce résultat utilise un système complet d'événements et la formule des probabilités totales.

Ici, nous adoptons une autre approche. Nous prouvons la proposition 1.1 en voyant les lois de Poisson comme limite de variables aléatoires suivant des lois binomiales (proposition 2.1 et en utilisant la stabilité des lois binomiales par somme.

Nous utiliserons aussi le théorème de Skorokhod (théorème 2.1) qui permet d'éviter d'utiliser le fait (faux d'ailleurs !) qui stipulerait que si les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent en loi vers X et Y, alors $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X + Y$. Notons que ce fait est néanmoins vrai lorsque Y est déterministe (théorème de Slutsky).

2 Preuve du résultat principal

Théorème 2.1. *Théorème de représentation de Skorokhod.*

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace polonais (espace métrique séparable complet) qui converge en loi vers une variable aléatoire Y.

Il existe un univers probabilisé $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$ et une suite de variables aléatoires $\left(\widehat{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$, avec $\mathrm{Loi}\left(\widehat{Y_n}\right) = \mathrm{Loi}\,(Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui converge presque-sûrement vers une variable aléatoire $\widehat{Y}$ définie sur $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$, avec $\mathrm{Loi}\left(\widehat{Y}\right) = \mathrm{Loi}\,(Y)$.

Nous renvoyons à [1] pour une preuve de ce théorème. Le résultat suivant est classique et nous renvoyons la preuve à [2].

Proposition 2.1. *« Paradigme » de Poisson.*

Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \lambda/n)$ (loi binomiale de paramètres n et λ/n).

Alors, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Nous prouvons maintenant la proposition 1.1.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Démonstration. Soient λ et μ deux réels strictement positifs. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \lambda/n)$ et $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \mu/n)$.

On suppose en outre que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires X_n et Y_m sont indépendantes.

D'après la proposition 2.1, les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent en loi respectivement vers X et Y avec $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$.

- On commence par supposer que $\dfrac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{Q}$: on écrit $\dfrac{\mu}{\lambda} = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

  Soit $Z_n := (X_{bn}, Y_{an})$. Par construction, les suites $(X_{bn})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y_{an})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent en loi vers X et Y, ainsi, par indépendance, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers le couple $Z := (X, Y)$.

  Comme $\mathbb{R}^2$ est un espace polonais, le théorème 2.1 assure qu'il existe un univers probabilisé $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$ et une suite de variables aléatoires $\left(\widehat{Z_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} := \left(\widehat{X_n}, \widehat{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$, avec $\text{Loi}\left(\widehat{Z_n}\right) = \text{Loi}(Z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qui converge presque-sûrement vers une variable aléatoire $\widehat{Z} = \left(\widehat{X}, \widehat{Y}\right)$ définie sur $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathscr{A}}, \widehat{\mathbb{P}}\right)$, avec $\text{Loi}\left(\widehat{Z}\right) = \text{Loi}(Z)$.

  En particulier, $\left(\widehat{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\widehat{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent presque-sûrement respectivement vers $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ et $\left(\widehat{X_n} + \widehat{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque-sûrement, donc en loi, vers $\widehat{X} + \widehat{Y}$.

  Or, $X_{bn} \hookrightarrow \mathscr{B}(bn, \lambda/bn)$ et $Y_{an} \hookrightarrow \mathscr{B}(an, \lambda/bn)$. Par indépendance, $\widehat{X_n} + \widehat{Y_n} \hookrightarrow \mathscr{B}((a+b)n, \lambda/bn)$.

  D'après la proposition 2.1, $\left(\widehat{X_n} + \widehat{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $(a+b) \times \dfrac{\lambda}{b} = \lambda + \mu$.

  Il s'ensuit que $\widehat{X} + \widehat{Y}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

- On traite le cas où $\dfrac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}$.

  Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers $\dfrac{\mu}{\lambda}$, donc $(r_n\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ.

  Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \hookrightarrow \mathscr{P}(r_n\lambda)$. Il est clair que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$.

  Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ indépendante de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de Y.

  En notant φ_U la fonction caractéristique d'une variable aléatoire U, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en utilisant l'indépendance, on a :

  $$\varphi_{X+Y_n}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_{Y_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

  Il s'ensuit que la suite $(X+Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X+Y$. Or, d'après le point précédent, $X + Y_n \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + r_n\lambda)$. Mais $(X+Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$, on en déduit que $X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu)$.

□

Références

[1] G. Miermont, `http://perso.ens-lyon.fr/gregory.miermont/thlim.pdf`.

[2] X. Oudot, *Maths MP/MP**. Vuibert, 2014.