Quadrature n° () 1-7

Inégalités sur le cercle discret

par Erik THOMAS*

Résumé.

Le but de cet article est de prouver une inégalité de type Poincaré-Wirtinger pour des sommes finies. L'approche adoptée ici est la minoration de la plus petite valeur propre non nulle d'un laplacien discret. Nous donnons aussi une inégalité de type Cheeger pour les sommes finies et montrons comment une telle inégalité permet de donner une inégalité isopérimétrique sur le cercle discret.

I Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 3. On définit $\mathscr{F}_n$ l'ensemble des applications n-périodiques de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$. $\mathscr{F}_n$ muni des lois usuelles est un espace vectoriel de dimension n.

On pose $I_n := [\![0, n-1]\!]$ le cercle discret. L'addition est donc celle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ainsi, pour définir un élément $f \in \mathscr{F}_n$, il suffit de définir f sur I_n.

On définit sur I_n une probabilité μ par $\mu := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k$ où δ_k est la mesure de Dirac en k. Autrement dit,

$$\forall A \subset I_n, \quad \mu(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{n} = \frac{\operatorname{card}(A)}{n}.$$

I_n muni de la tribu $\mathscr{P}(I_n)$ et de cette mesure est donc un espace probabilisé. On définit sur $\mathscr{F}_n \times \mathscr{F}_n$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par : pour tout $(f, g) \in \mathscr{F}_n \times \mathscr{F}_n$,

$$\langle f, g \rangle := \int_{I_n} f(k) g(k) \, \mathrm{d}\mu(k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k).$$

Il est facile de vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur I_n. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Remarque 1. *La raison pour laquelle nous utilisons le symbole $\int$ plutôt que le symbole $\sum$ apparaîtra plus clairement plus loin.*

* erik.thomas@ens-rennes.fr

Définition 2. *Gradient discret.*

Si $f \in \mathscr{F}_n$, on définit ∇f par

$$\forall k \in I_n, \quad \nabla f(k) := f(k+1) - f(k).$$

On note que $\nabla f \in \mathscr{F}_n$.

Remarque 3. *Ces définitions introduisent des notations connues du lecteur mais ici ce ne sont que des notations !*

Le but de cet article est de montrer la proposition suivante.

Proposition 4. *Inégalité de Poincaré.*

Pour tout $f \in \mathscr{F}_n$ telle que $\int_{I_n} f \, \mathrm{d}\mu = 0$, on a

$$\int_{I_n} (\nabla f)^2(k) \, \mathrm{d}\mu(k) \geq 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \int_{I_n} f^2(k) \, \mathrm{d}\mu(k).$$

Les inégalités de type

$$\int |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}\mu \geq c \int |f|^2 \, \mathrm{d}\mu, \tag{1}$$

avec $c \geq 0$, sont des inégalités classiques de l'Analyse : elles sont souvent appelées inégalité de Poincaré. Le lecteur reconnaîtra peut-être en ces inégalités une généralisation de l'inégalité de Wirtinger.

Proposition 5. *Inégalité de Wirtinger.*

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = 0$ et $f(0) = f(1)$, alors

$$\int_0^1 f'(t)^2 \, \mathrm{d}t \geq 4\pi^2 \int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Une approche possible pour aborder ces inégalités est de s'intéresser au problème des valeurs propres du laplacien et remarquer que la meilleure constante c qui vérifie (1) est liée à la plus petite valeur propre du laplacien. Évidemment cette plus petite valeur propre dépend sûrement de la mesure μ ou, si on adopte une vision plus tournée vers les équations aux dérivées partielles, de la géométrie du domaine.

Ainsi, l'existence d'une constante $c > 0$ n'est pas assurée. Si E est un convexe de $\mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue 1 et $\mathrm{d}\mu(x) = \mathbf{1}_E(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de ce convexe, on peut montrer que la constante c est strictement positive.

Le résultat reste encore valable μ est une mesure de probabilité log-concave, i.e. $\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{e}^{-V(x)}\mathrm{d}x$ avec $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On peut alors montrer que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \mathrm{d}\mu \geq \frac{c}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|\,\mathrm{d}\mu\right)^2} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \mathrm{d}\mu$$

où $c > 0$ est une constante universelle. Nous renvoyons à [2] ou [4]. L'inégalité ci-dessus n'est pas optimale, la meilleure actuelle est donnée, à notre connaissance, par Bobkov dans [1].

L'analyse discrète sur le cube $\{-1,1\}^n$ muni de la mesure uniforme (voir [3] et [6] pour des détails) est riche d'enseignements et montre que l'on obtient des inégalités analogues que sur $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure gaussienne γ_n définie par $\mathrm{d}\gamma_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-|x|^2/2}}{(2\pi)^{n/2}}\mathrm{d}x$: on peut citer une inégalité de Poincaré du même type que celle énoncée ici ou encore une inégalité log-Sobolev du type

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \ln(f)\,\mathrm{d}\gamma_n \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla f|^2}{f}\mathrm{d}\gamma_n,$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ suffisamment régulière telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\gamma_n = 1$.

Dans un dernier temps, nous montrerons la proposition qui s'en déduit de la proposition 4.

Proposition 6. *Inégalité de Cheeger.*

Pour tout $f \in \mathscr{F}_n$ avec $\int_{I_n} f\,\mathrm{d}\mu = 0$, on a :

$$\int_{I_n} |\nabla f(k)|\,\mathrm{d}\mu(k) \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \int_{I_n} |f(k)|\,\mathrm{d}\mu(k).$$

Les inégalités du type

$$\int |\nabla f|\,\mathrm{d}\mu \geq c\int |f|\,\mathrm{d}\mu, \tag{2}$$

avec $c > 0$ s'appellent en Analyse des inégalités de type Cheeger. Dans [2], Cheeger montre une minoration entre la meilleure constante c qui vérifie (2) et la plus petite valeur propre d'un laplacien. Plus généralement, les inégalités de type Cheeger sont liées à l'existence d'une inégalité isopérimétrique pour la mesure μ.

Depuis, il est bien connu que les inégalités (1) et (2) sont liées et, dans des cas favorables (par exemple le cas des mesures log-concaves), les meilleures constantes qui vérifient (1) et (2) sont équivalentes. Nous renvoyons à [5] pour des développements plus complets.

Enfin, dans une dernière partie, nous allons voir comment la proposition 6 implique une inégalité isopérimétrique sur le cercle discret. Plus précisément, nous allons établir la proposition suivante.

Proposition 7. *Inégalité isopérimétrique sur le cercle discret I_n.*

Pour tout $\Omega \subset I_n$, en notant $\partial\Omega$ le bord de Ω (voir définition 16), on a :

$$\mu(\partial\Omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\mu(\Omega)(1-\mu(\Omega))}.$$

II Analyse discrète

Notre approche pour montrer la proposition 4 est une approche spectrale et donc un problème de recherche de valeurs propres/vecteurs propres pour un opérateur positif.

Définition 8. *Laplacien discret.*

Si $f \in \mathscr{F}_n$, on définit Δf par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \Delta f(k) := f(k+1) + f(k-1) - 2f(k).$$

On remarque que $\Delta f \in \mathscr{F}_n$.

Remarque 9. *L'opérateur Δ n'a évidemment rien à voir avec le laplacien usuel, même si la proposition suivante montre qu'il se comporte comme tel.*

Proposition 10. *Formule d'intégration par parties.*

Pour tout $(f,g) \in \mathscr{F}_n^2$, on a

$$\int_{I_n} f(k)\Delta g(k)\,\mathrm{d}\mu(k) = -\int_{I_n} \nabla f(k)\nabla g(k)\,\mathrm{d}\mu(k).$$

Démonstration. D'une part, on a :

$$\int_{I_n} f(k)\Delta g(k)\,\mathrm{d}\mu(k) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k\in I_n} f(k)g(k+1) + \sum_{k\in I_n} f(k)g(k-1) - 2\sum_{k\in I_n} f(k)g(k)\right).$$

D'autre, on a :

$$
\begin{aligned}
& -\int_{I_n} \nabla f(k) \nabla g(k) \mathrm{d}\mu(k) \\
= \; & -\frac{1}{n} \sum_{k \in I_n} (f(k+1) - f(k))(g(k+1) - g(k)) \\
= \; & -\frac{1}{n} \sum_{k \in I_n} f(k+1) g(k+1) + \frac{1}{n} \sum_{k \in I_n} f(k+1) g(k) \\
& + \frac{1}{n} \sum_{k \in I_n} f(k) g(k+1) - \frac{1}{n} \sum_{k \in I_n} f(k) g(k).
\end{aligned}
$$

On utilise la bijection $k \longmapsto k-1$ dans les deux premières sommes pour conclure.

□

On en déduit que $-\Delta$ est un opérateur auto-adjoint, positif de $\mathscr{F}_n$. Ses valeurs propres sont positives. On remarque que 0 est valeur propre car $\Delta \mathbf{1} = 0$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 de $\mathscr{F}_n$. La proposition suivante est fondamentale car elle permet de faire le lien entre la proposition 4 et la décomposition spectrale de Δ.

Proposition 11. *On note λ_1 la plus petite valeur propre strictement positive de $-\Delta$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}_n$ telle que $\int_{I_n} f \mathrm{d}\mu = 0$, on a*

$$
\int_{I_n} (\nabla f)^2 (k) \mathrm{d}\mu(k) \geq \lambda_1 \int_{I_n} f^2(k) \mathrm{d}\mu(k).
$$

De plus, la constante λ_1 est optimale.

Avant de prouver la proposition, nous aurons besoin de déterminer le noyau de Δ.

Lemme 12. *Noyau de Δ.*
On a $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 de $\mathscr{F}_n$.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. On a donc

$$
\forall k \in I_n, \quad f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) = 0.
$$

Par périodicité,

$$
\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) = 0.
$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont 1 est l'unique solution, ainsi il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$
\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k) = A + Bk.
$$

Or, f est périodique donc bornée et la suite $(A + Bk)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $B = 0$. Donc f est constante.

□

Nous prouvons maintenant la proposition 11.

Démonstration. Comme $\mathscr{F}_n$ est un espace vectoriel de dimension n et $-\Delta$ est un opérateur auto-adjoint positif, $-\Delta$ admet n valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, disons $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$.

Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note $E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}(f_i)$ les sous-espaces propres associés. Ainsi, le résultat du lemme 12 se réécrit en $E_{\lambda_0} = \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1.

Le théorème spectral assure que $\mathscr{F}_n = E_{\lambda_0} \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} E_{\lambda_{n-1}}$.

L'hypothèse $\int_{I_n} f \mathrm{d}\mu = 0$ se réécrit en $\langle f, \mathbf{1} \rangle = 0$, soit $f \in E_{\lambda_0}^{\perp} = E_{\lambda_1} \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} E_{\lambda_{n-1}}$. Il existe donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$. En utilisant la proposition 10, on a donc :

$$
\begin{aligned}
\int_{I_n} (\nabla f)^2 (k) \mathrm{d}\mu(k) &= \int_{I_n} (-\Delta f)(k) f(k) \mathrm{d}\mu(k) \\
&= \left\langle -\Delta \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i \right), \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i f_i, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i^2 \|f_i\|^2 \\
&\geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 \|f_i\|^2 \\
&\geq \lambda_1 \|f\|^2.
\end{aligned}
$$

Pour remarquer que la constante λ_1 est optimale, il suffit de prendre $f \in E_{\lambda_1}$.

□

Ainsi, pour terminer la preuve de la proposition 4, il suffit d'obtenir une minoration de λ_1. On remarque que toute amélioration de la minoration de λ_1 entraîne *de facto* une amélioration de l'inégalité annoncée par la proposition 4.

III Étude du problème spectral et preuve de la proposition 4

Dans cette sous-partie, nous montrons la proposition suivante qui, en utilisant la proposition 11, permet de prouver la proposition 4.

Proposition 13. *Minoration de λ_1 et majoration de λ_{n-1}.*
On garde les notations de la proposition 11 : on note $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ les valeurs propres de $-\Delta$.
On a $\lambda_1 \geq 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ et $\lambda_{n-1} \leq 4$.

Démonstration. Soit λ une valeur propre non nulle de $-\Delta$, il existe $f \in \mathscr{F}_n$ non nulle telle que

$$-\Delta f = \lambda f. \tag{3}$$

Déjà, comme $\lambda \neq 0$, en utilisant la proposition 10, on remarque que

$$\int_{I_n} f \, \mathrm{d}\mu = -\frac{1}{\lambda} \int_{I_n} \Delta f \, \mathbf{1} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\lambda} \int_{I_n} \nabla f \nabla \mathbf{1} \, \mathrm{d}\mu = 0 \tag{4}$$

car $\nabla \mathbf{1} = 0$. La ligne (3) donne

$$\forall k \in I_n, \quad f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) = -\lambda f(k).$$

Par périodicité, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k+1) - (2-\lambda) f(k) + f(k-1) = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - (2-\lambda) r + 1 = 0$ dont le discriminant est $\lambda(\lambda - 4)$. On discute suivant les valeurs de λ.

1. Si $\lambda > 4$, alors $\Delta > 0$. Les racines sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{(2-\lambda) \pm \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}.$$

   Il existe deux réels A et B tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k) = A\lambda_-^k + B\lambda_+^k.$$

   Or, on montre que $\lambda_- < -1 < \lambda_+ < 1$ et $\lambda_+ \neq 0$. La suite $\left(\lambda_-^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ n'étant pas bornée et f l'est (car périodique), on en déduit que $A = 0$. Puis comme $\left(\lambda_+^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en prenant des valeurs non nulles, on en déduit que $B = 0$ et $f = 0$.

   Ainsi, les valeurs de $\lambda > 4$ ne peuvent être des valeurs propres de $-\Delta$.

2. Si $\lambda = 4$, alors $\Delta = 0$. L'équation caractéristique a une unique solution -1 : il existe deux réels A et B tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k) = (A + Bk)(-1)^k.$$

   La suite $\left((A+Bk)(-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $B = 0$, donc $f(k) = A(-1)^k$.

   Réciproquement, il est clair que les suites de la forme $\left(A(-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation $A(-1)^{k+2} - 2A(-1)^{k+1} + A(-1)^k = 0$.

   Comme $A \neq 0$ (car $f \neq 0$), la suite $\left(A(-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est 2-périodique, elle est donc n-périodique si, et seulement si, n est pair.

   En particulier, 4 un majorant de la plus grande valeur propre de $-\Delta$.

3. On suppose $0 < \lambda < 4$. On a $\Delta < 0$. Les solutions de l'équation caractéristique sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{(2-\lambda) \pm \mathrm{i}\sqrt{\lambda(4-\lambda)}}{2}. \tag{5}$$

   On constate facilement que $|\lambda_-| = |\lambda_+| = 1$.
   On remarque que la partie réelle de λ_+ change de signe pour $\lambda = 2$, ainsi il faudrait discuter suivant que $\lambda \in]2,4[$, $\lambda = 2$ et $\lambda \in]0,2[$. Nous allons seulement montrer que si $\lambda \in]0,2[$, alors λ est minoré par $2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$. On suppose donc $\lambda \in]0,2[$.
   Comme $\Re(\lambda_+) > 0$ et $\Im(\lambda_+) > 0$, il existe $\theta_\lambda \in]0, \pi/2[$ tel que $\lambda_+ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_\lambda}$, ainsi il existe deux réels A et B tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k) = A\cos(k\theta_\lambda) + B\sin(k\theta_\lambda).$$

   ⋆ Si $A = 0$, alors comme $f(0) = f(n) = 0$, on en déduit que $n\theta$ est un multiple de π : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_\lambda = \frac{k\pi}{n}$. Comme $\theta_\lambda > 0$, on a

$$\theta_\lambda \geq \frac{\pi}{n}. \tag{6}$$

   ⋆ Si $A \neq 0$, alors quitte à considérer $\frac{1}{A} f$ aussi vecteur propre de $-\Delta$ pour la valeur propre λ, on peut supposer $f(k) = \cos(k\theta_\lambda) + B\sin(k\theta_\lambda)$.
   Or, $\int_{I_n} f \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos(k\theta_\lambda) + B\sin(k\theta_\lambda)\right) = 0$ (ligne (4)). Notons que θ_λ n'est pas un multiple de 2π car $\theta_\lambda \in]0, \pi/2[$, ainsi des calculs classiques sur les sommes de cos et sin donnent

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{I_n} f \, \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{\sin(n\theta_\lambda/2)}{\sin(\theta_\lambda/2)} \left(\cos\left(\frac{(n-1)\theta_\lambda}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + B\sin\left(\frac{(n-1)\theta_\lambda}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

   Si $\sin(n\theta_\lambda/2) = 0$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{n\theta_\lambda}{2} = k\pi$, soit $\theta_\lambda = \frac{2k\pi}{n}$. Comme $\theta_\lambda > 0$, on a $k > 0$ et

$$\theta_\lambda \geq \frac{2\pi}{n} \tag{7}$$

   On suppose donc $\sin(n\theta_\lambda/2) \neq 0$, ainsi $\cos\left(\frac{(n-1)\theta_\lambda}{2}\right) + B\sin\left(\frac{(n-1)\theta_\lambda}{2}\right) = 0$.
   De la même façon que ci-dessus, si $\sin\left(\frac{(n-1)\theta_\lambda}{2}\right) = 0$, alors

$$\theta_\lambda \geq \frac{2\pi}{(n-1)} \tag{8}$$

On suppose $\sin\left(\frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2}\right) \neq 0$, on a alors $B = -\frac{\cos\left(\frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2}\right)}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & f(k) \\ = & \frac{1}{\sin\left(\frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2}\right)} \left(\sin\left(\frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2}\right) \times \right. \\ & \left. \cos(k\theta_\lambda) - \cos\left(\frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2}\right) \times \sin(k\theta_\lambda)\right) \\ = & \frac{1}{\sin\left(\frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2}\right)} \sin\left(\left(\frac{n-1}{2} - k\right)\theta_\lambda\right). \end{aligned}$$

Par périodicité, on a

$$1 = f(0) = f(n) = \frac{\sin\left(-\frac{(n+1)\,\theta_\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2}\right)},$$

soit $\sin\left(-\frac{(n+1)\,\theta_\lambda}{2}\right) = \sin\left(\frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2}\right)$. On a donc

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ 2k\pi - \frac{(n+1)\,\theta_\lambda}{2} = \frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2} \quad \text{ou}$$

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{(n+1)\,\theta_\lambda}{2} = \pi - \frac{(n-1)\,\theta_\lambda}{2} + 2k\pi,$$

soit

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ 2k\pi = n\theta_\lambda \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta_\lambda = -(2k+1)\,\pi.$$

Comme $\theta_\lambda \in \,]0,\pi/2[$, la dernière condition est impossible, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_\lambda = \frac{2k\pi}{n}$, puis comme $\theta_\lambda \geq 0$,

$$\theta_\lambda \geq \frac{2\pi}{n}. \tag{9}$$

Pour résumer, si $\lambda \in \,]0,2[$, les lignes (6), (7), (8) et (9) donnent

$$\theta_\lambda \geq \min\left\{\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n-1}\right\} = \frac{\pi}{n} \tag{10}$$

La valeur de λ_+ trouvée à la ligne (5) donne

$$\tan(\theta_\lambda) = \frac{\Im(\theta_\lambda)}{\Re(\theta_\lambda)} = \frac{\sqrt{\lambda\,(4-\lambda)}}{2-\lambda}.$$

On pose $\varphi(\lambda) := \frac{\sqrt{\lambda\,(4-\lambda)}}{2-\lambda}$. La ligne (10) donne

$$\varphi(\lambda) \geq \tan\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{11}$$

Il est facile de montrer que φ est une bijection strictement croissante de $]0,2[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa bijection réciproque est donnée par $\varphi^{-1}(y) = 2 - \frac{2}{\sqrt{1+y^2}}$. Comme φ^{-1} est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on récupère

$$\lambda \geq \varphi^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

où l'on a utilisé la relation $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Pour conclure, si pour toute valeur propre λ de $-\Delta$, en discutant selon que $\lambda \geq 2$ ou $\lambda \in \,]0,2[$, on a :

$$\lambda_1 \geq \min\left\{2, 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right\} = 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

□

Remarque 14. *En notant λ_n la plus grande valeur propre de $-\Delta$, la preuve de la proposition 13 montre que $\lambda_n \leq 4$. Ainsi, en adaptant la preuve de la proposition 11, on montre que*

$$\forall f \in \mathscr{F}_n, \quad \int_{I_n} (\nabla f)^2(k)\,\mathrm{d}\mu(k) \leq 4 \int_{I_n} f^2(k)\,\mathrm{d}\mu(k).$$

L'hypothèse « $\int_{I_n} f\,\mathrm{d}\mu = 0$ » est alors inutile. Ce genre d'inégalité de type « Poincaré inversée » n'est pas classique en Analyse pour la simple raison que le spectre de $-\Delta$ (Δ est ici le laplacien usuel) n'est, a priori, pas majoré. Le fait que 4 ne dépende pas de la longueur de l'intervalle est remarquable.

IV Inégalité de Cheeger et inégalité isopérimétrique

Dans cette partie, nous prouvons les propositions 6 et 7. Nous présentons la preuve de ces deux propositions dans une même partie car en Analyse « usuelle », les inégalités isopérimétriques et de Cheeger sont généralement équivalentes, nous renvoyons à [5].

Nous prouvons la proposition 6.

Démonstration. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Soit $f \in \mathscr{F}_n$ telle que

$\int_{I_n} f\,\mathrm{d}\mu = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} |\nabla f|\,\mathrm{d}\mu &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(k+1)-f(k)| \\
&\geq \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}(f(k+1)-f(k))^2} \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{n}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}f(k)^2} \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}|f(k)| \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\int_{I_n}|f|\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

□

Remarque 15. *La preuve ci-dessus utilise uniquement l'équivalence des normes 1 et 2 et montre en fait que les propositions 4 et 6 sont équivalentes (si l'on ne se préoccupe pas des constantes). Ce n'est évidemment plus le cas dans un cadre continu, i.e. avec des « vraies » intégrales. Dans ce cas, les inégalités de type Cheeger sont plus fortes que les inégalités de Poincaré et les impliquent donc. La réciproque est fausse. Nous renvoyons encore à [5] pour des détails.*

Avant d'établir la proposition 7, nous utiliserons la définition suivante.

Définition 16. *Bord.*

Soit $\Omega \subset I_n$. On définit son bord, noté $\partial\Omega$, par :

$$\partial\Omega := \{x \in \Omega,\ x+1 \notin \Omega \text{ ou } x-1 \notin \Omega\}.$$

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 7.

Démonstration. Soit $\Omega \subset I_n$. Soit $\mathbf{1}_\Omega$ la fonction indicatrice de Ω. On note $m_\Omega = \int_{I_n} \mathbf{1}_\Omega\,\mathrm{d}\mu = \frac{\mathrm{card}(\Omega)}{n} \in [0,1]$. D'après la proposition 6, on a

$$\int_{I_n}|\nabla \mathbf{1}_\Omega|\,\mathrm{d}\mu \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\int_{I_n}|\mathbf{1}_\Omega - m_\Omega|\,\mathrm{d}\mu. \tag{12}$$

Or,

$$\int_{I_n}|\nabla \mathbf{1}_\Omega|\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}|\mathbf{1}_\Omega(k+1)-\mathbf{1}_\Omega(k)| \leq \frac{2\mathrm{card}(\partial\Omega)}{n} \tag{13}$$

car $|\mathbf{1}_\Omega(k+1)-\mathbf{1}_\Omega(k)| = 1$ si, et seulement si, k ou $k+1$ appartient à $\partial\Omega$ et un élément du bord est compté au plus deux fois.

De plus,

$$\begin{aligned}
&\int_{I_n}|\mathbf{1}_\Omega - m_\Omega|\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\Omega}|\mathbf{1}_\Omega - m_\Omega|\,\mathrm{d}\mu + \int_{I_n\setminus\Omega}|\mathbf{1}_\Omega - m_\Omega|\,\mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k\in\Omega}\left|1-\frac{\mathrm{card}(\Omega)}{n}\right| + \frac{1}{n}\sum_{k\in I_n\setminus\Omega}\left|0-\frac{\mathrm{card}(\Omega)}{n}\right| \\
&= \frac{1}{n}\left(\mathrm{card}(\Omega)\left(1-\frac{\mathrm{card}(\Omega)}{n}\right)+(n-\mathrm{card}(\Omega))\frac{\mathrm{card}(\Omega)}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{card}(\Omega)}{n}\left(1-\frac{\mathrm{card}(\Omega)}{n}\right) \\
&= \mu(\Omega)(1-\mu(\Omega)).
\end{aligned}$$

Cette inégalité utilisée avec (12) et (13) donne

$$\mu(\partial\Omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\mu(\Omega)(1-\mu(\Omega)).$$

□

Remarque 17. *Si l'on suppose que $\mu(\Omega) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a $\mu(\partial\Omega) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{n}}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\mu(\Omega)$ qui est la forme « classique » des inégalités isopérimétriques.*

V Brève généralisation à des mesures quelconques sur le cercle

Dans cette partie, on s'intéresse à des mesures quelconques sur I_n. On se donne une suite $(\nu_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ telle que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\nu_k > 0$ et $\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k = 1$.

On définit alors une mesure ν sur $\mathscr{P}(I_n)$ par $\nu = \sum_{k=0}^{n-1}\nu_k\delta_k$.

Il est facile de remarquer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_\nu$ définie sur $\mathscr{F}_n \times \mathscr{F}_n$ par :

$$\forall (f,g) \in \mathscr{F}_n \times \mathscr{F}_n,\quad \langle f,g\rangle_\nu := \int_{I_n} fg\,\mathrm{d}\nu = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k)\nu_k.$$

L'application $f \in \mathscr{F}_n \longmapsto \sqrt{\int_{I_n} f^2\,\mathrm{d}\nu}$ définit une norme $\|\cdot\|_\nu$ sur $\mathscr{F}_n$ équivalente à la norme $\|\cdot\|$ définie ci-dessus : il existe deux réels strictement positifs c_1 et c_2 tels que

$$\forall f \in \mathscr{F}_n,\quad c_1\|f\|_\nu \leq \|f\| \leq c_2\|f\|_\nu.$$

On peut énoncer une proposition analogue à proposition 4.

Proposition 18. *On rappelle que μ est la mesure uniforme sur I_n. Pour tout $f \in \mathscr{F}_n$ telle que $\int_{I_n} f \,\mathrm{d}\mu = 0$, on a :*

$$\int_{I_n} (\nabla f)^2 \,\mathrm{d}\nu \geq \frac{2c_1^2}{c_2^2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\int_{I_n} f^2 \mathrm{d}\nu.$$

Remarque 19. *On peut évidemment énoncer des résultats analogues aux propositions 6 et 7.*

Remarque 20. *L'intérêt de la proposition 18 n'est pas tant dans l'existence de la constante, dont on ne peut pas dire beaucoup sans avoir de manière explicite c_1 et c_2, mais plus de la dépendance de la constante de Poincaré en c_1 et c_2.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{F}_n$ telle que $\int_{I_n} f \,\mathrm{d}\mu = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{I_n} (\nabla f)^2 \,\mathrm{d}\nu &\geq \frac{1}{c_2^2}\int_{I_n} (\nabla f)^2 \,\mathrm{d}\mu \\ &\geq \frac{2}{c_2^2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\int_{I_n} f^2 \,\mathrm{d}\mu \\ &\geq \frac{2c_1^2}{c_2^2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\int_{I_n} f^2 \,\mathrm{d}\nu. \end{aligned}$$

□

Références

[1] S. G. Bobkov, *Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures*. Ann. Probab.27 (4), pp. 1903-1921, 1999.

[2] J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*. Problems in Analysis, Symposium in honor of S. Bochner, pp. 195-199.Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[3] D. Cordero-Erausquin, M. Ledoux, *Hypercontractive Measures, Talagrand's Inequality, and Influences*. Geometric Aspects of Functional Analysis, LNM 2050, Springer, pp. 169-189, 2012.

[4] R. Kannan, L. Lovász, M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*. Discrete Comput. Geom.,13, pp. 541-559, 1995.

[5] E. Milman, *On the role of Convexity in Isoperimetric, Spectral Gap and Concentration*. Invent. Math. 177, no. 1, pp. 1-43, 2009.

[6] M. Talagrand, *On Russo's approximate zero-one law*. Ann. Probab. 22, pp. 1576-1587, 1994.