Sur l'inégalité isopérimétrique pour les polygones

Erik Thomas *

Résumé

Le but de cette note est de donner une preuve élémentaire de l'inégalité isopérimétrique pour les polygones qui se base sur la formule de Héron. Nous en déduisons alors une preuve de l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^2$ pour les courbes simples.

1 Introduction

Dans tout la suite, n est un entier naturel au moins égal à 3. Avant d'aller plus en avant, faisons quelques rappels sur les polygones. On renvoie à [1] pour aller (beaucoup) plus loin.

Définition 1.1. *Sur les polygones*

- *Un polygone est la donnée d'une suite finie de points du plan $A_1, \ldots, A_r$, appelés les sommets du polygone, et des segments $[A_1A_2], [A_2A_3], \ldots, [A_rA_1]$ qui relient les sommets du polygone.*
- *Un polygone est dit simple si deux côtés non consécutifs ne se rencontrent pas et deux côtés consécutifs n'ont en commun que l'un de leurs sommets.*
- *Un polygone est équilatéral si tous ses côtés sont de même longueur.*
- *Un polygone $P = A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ est régulier s'il est équilatéral et si toutes les mesures des angles $\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$ sont égales. On notera que, l'addition des indices est modulo n, ainsi, par exemple, le sommet A_n désigne le sommet A_0. Cette convention sera gardée dans toute la suite.*

Remarque 1. D'après le théorème de Jordan, un polygone simple partitionne le plan en deux composantes connexes : une bornée et l'autre non bornée.

Le but de cette note est de donner une preuve très élémentaire de l'inégalité isopérimétrique pour les polygones du plan euclidien, basée sur la formule de Héron (proposition 2.1).

Proposition 1.1. *Inégalité isopérimétrique pour les polygones*
Pour tout polygone P du plan ayant n côtés, on a :

$$\mathscr{L}^2(P) \geq 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \mathscr{A}(P), \tag{1}$$

où $\mathscr{L}(P)$ et $\mathscr{A}(P)$ désignent respectivement le périmètre et l'aire de P. Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, $P := P_n$ où P_n est « le » polygone régulier ayant n côtés.

Nous montrons comment cette inégalité permet de retrouver un cas particulier de l'inégalité isopérimétrique.

Proposition 1.2. *Inégalité isopérimétrique*
Soit C une courbe fermée simple (i.e. sans point double) de $\mathbb{R}^2$. Alors, on a $\mathscr{L}^2(C) \geq 4\pi\mathscr{A}(C)$.

Remarque 2. Dans l'énoncé de l'inégalité, lorsque nous écrivons « $\mathscr{A}(C)$ », nous entendons l'aire de la composante connexe bornée delimitée par C (théorème de Jordan) et non pas l'aire de la courbe $\mathscr{C}$ qui est nulle.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

2 Preuve des résultats

Comme annoncé, nous utiliserons la formule de Héron.

Proposition 2.1. *Formule de Héron*

Soient T un triangle dont les longueurs des côtés sont notées a, b et c. Soit $p := \dfrac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre de T.

Alors $\mathscr{A}(T) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1. *Soient A et B deux points distincts du plan. On note d la distance entre A et B. Soit $p > d$. Il existe deux uniques positions possibles pour un point C pour que le triangle ABC ait un périmètre égal à $p+d$ et soit d'aire maximale : ces deux positions sont situées sur la médiatrice du segment $[AB]$ et sont symétriques par rapport au segment $[AB]$.*

Remarque 3. Le résultat reste vrai pour $p = d$, mais n'a aucun intérêt.

Nous prouvons le lemme 2.1.

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose $d = 1$ et que les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0,0)$ et $(1,0)$, de sorte que $d = 1$.

Pour tout point C du plan tel que le triangle ABC ait un périmètre égal à $p+d$, on note $d_a \in \,]0,p[$ la distance AC, on a donc $CB = p - d_a$. La formule de Héron donne alors

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(ABC) &= \sqrt{\frac{1+p}{2} \times \left(\frac{1+p}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1+p}{2} - d_a\right) \times \left(\frac{1+p}{2} - (p - d_a)\right)} \\
&= \frac{\sqrt{(1+p)(p-1)}}{4} \times \sqrt{(1+p-2d_a)(1-p+2d_a)}.
\end{aligned}$$

Or, la fonction $d_a \mapsto (1+p-2d_a)(1-p+2d_a)$ est une fonction trinôme de coefficient dominant strictement négatif dont les racines sont $\dfrac{1+p}{2}$ et $\dfrac{p-1}{2}$. Par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$, l'aire de ABC est maximale pour $d_a := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+p}{2} + \dfrac{p-1}{2}\right) = \dfrac{p}{2}$.

Pour cette valeur de d_a, on a $AC = BC = \dfrac{p}{2}$, ce qui termine la preuve.

□

Nous prouvons la proposition 1.1.

Démonstration. Un simple calcul permet de constater que l'inégalité (1) est une égalité lorsque P est un polygone régulier.

Soit $P = A_0A_1 \dots A_{n-1}$ un polygone du plan qui réalise l'égalité dans l'inégalité (1.1). On suppose que les points $A_0, \dots, A_{n-1}$ sont dans le sens trigonométrique et on suppose que P n'est pas un polygone régulier.

On commence par remarquer que l'on peut prendre P convexe. Si P n'est pas convexe, il existe une diagonale $[A_iA_j]$ (avec $i < j - 1$) qui n'est pas incluse dans P. En symétrisant la partie du polygone située entre les points A_i et A_j par rapport au segment $[A_iA_j]$, on obtient un nouveau polygone de même périmètre et d'aire strictement plus grande que le polygone initial, ce qui contredit le faire que P réalise l'égalité dans (1).

- Si $n = 3$, d'après le lemme 2.1, le triangle est isocèle. On montre alors facilement que le triangle équilatéral maximise l'aire à périmètre fixé.
- Si $n = 4$, en utilisant deux fois le lemme 2.1, on trouve que le quadrilatère est un losange. On montre alors que ce losange est un carré.
- On suppose $n \geq 5$.
  - ⋆ Si P n'est pas équilatéral, alors il existe deux côtés consécutifs dont les longueurs sont différentes, par exemple $A_0A_1 \neq A_1A_2$. En particulier, A_1 n'est pas situé sur la médiatrice du segment $[A_0A_2]$. D'après le lemme 2.1, on peut « déplacer le point A_1 » pour conserver le périmètre du triangle $A_0A_1A_2$, donc du polygone P car A_0A_2 est une diagonale intérieure du polygone et augmenter l'aire du triangle $A_0A_1A_2$, donc du polygone P.

    On suppose donc que P est équilatéral et que chaque côté est de longueur 1.

- $\star$ Supposons que le triangle $A_iA_{i+2}A_{i+4}$ n'est pas isocèle. On pose $c := A_iA_{i+2} + A_{i+2}A_{i+4}$, on note que $c \leq 4$. D'après le lemme 2.1, il existe un point A'_{i+2} situé sur la médiatrice du segment $[A_iA_{i+4}]$ tel que $\mathscr{A}\left(A_iA'_{i+2}A_{i+4}\right) > \mathscr{A}\left(A_iA_{i+2}A_{i+4}\right)$ et $A_iA'_{i+2} + A'_{i+2}A_{i+4} = c$.
  On pose $t := A_iA_{i+2}$, ainsi $c - t = A_{i+2}A_{i+4}$. D'après la formule de Héron, et en notant $\mathscr{A} = \mathscr{A}\left(A_iA_{i+1}A_{i+2}\right) + \mathscr{A}\left(A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \sqrt{\frac{2+t}{2} \times \frac{t}{2} \times \frac{t}{2} \times \frac{2-t}{2}} + \sqrt{\frac{c-t+2}{2} \times \frac{c-t}{2} \times \frac{c-t}{2} \times \frac{2-c+t}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\left(t\sqrt{4-t^2} + (c-t)\sqrt{4-(c-t)^2}\right).\end{aligned}$$

  On pose $f : u \mapsto \frac{1}{4}\left(\sqrt{4-u^2} + (c-u)\sqrt{4-(c-u)^2}\right)$ et $g : u \mapsto \frac{1}{4}u\sqrt{4-u^2}$ de sorte que $f(u) = g(u) + g(c-u)$. Notons que la fonction f est bien définie sur l'intervalle $[0, c]$. Un calcul donne $g''(u) = -\frac{u\left(6-u^2\right)}{2\left(4-u^2\right)^{3/2}}$. On remarque $g''(u) < 0$ sur $]0, 2[$, donc g' est strictement décroissante sur $[0, 2[$. On a donc

$$f'(u) = g'(u) - g'(c-u) > 0 \Leftrightarrow g'(u) > g'(c-u) \Leftrightarrow u < c - u \Leftrightarrow u < \frac{c}{2}.$$

  On en déduit que f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{c}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{c}{2}, c\right]$, en particulier, elle atteint son maximum en $\frac{c}{2}$. Autrement dit, la quantité $\mathscr{A}\left(A_iA_{i+1}A_{i+2}\right) + \mathscr{A}\left(A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}\right)$ admet un maximum strict si, et seulement si, $A_{i+2} = A'_{i+2}$.
  Soient A'_{i+1} et A'_{i+3} des points situés respectivement sur les médiatrices des segments $\left[A_iA'_{i+2}\right]$ et $\left[A'_{i+2}A_{i+4}\right]$. D'après le lemme 2.1, on a $\mathscr{A}\left(A_iA_{i+1}A'_{i+2}\right) \geq \mathscr{A}\left(A_iA_{i+1}A_{i+2}\right)$ et $\mathscr{A}\left(A'_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}\right) \geq \mathscr{A}\left(A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}\right)$. Il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left(A_iA'_{i+1}A'_{i+2}A'_{i+3}A_{i+4}\right) &= \mathscr{A}\left(A_iA'_{i+1}A'_{i+2}\right) + \mathscr{A}\left(A_iA'_{i+2}A_{i+4}\right) + \mathscr{A}\left(A'_{i+2}A'_{i+3}A_{i+4}\right) \\ &> \mathscr{A}\left(A_iA_{i+1}A_{i+2}\right) + \mathscr{A}\left(A_iA_{i+2}A_{i+4}\right) + \mathscr{A}\left(A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}\right) \\ &> \mathscr{A}\left(A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}\right).\end{aligned}$$

  Ainsi, le polygone P' constitué des points de P sauf les points A_{i+1}, A_{i+2} et A_{i+3} remplacés par respectivement A'_{i+1}, A'_{i+2} et $\mathscr{A}'_{i+3}$ a le même périmètre que P et $\mathscr{A}(P') > \mathscr{A}(P)$, ce qui contredit le fait que P réalise l'égalité dans (1).
  Il s'ensuit que le triangle $A_iA_{i+2}A_{i+4}$ est isocèle : on a $A_iA_{i+2} = A_{i+2}A_{i+4}$. D'après le lemme (2.1), les points A_{i+1} et A_{i+3} sont situés les médiatrices des segments $[A_iA_{i+2}]$ et $[A_{i+2}A_{i+4}]$.
- $\star$ Ainsi les triangles $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ et $A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}$ sont tels que $A_iA_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2} = A_{i+2}A_{i+3} = A_{i+3}A_{i+4} = 1$ et $A_iA_{i+2} = A_{i+2}A_{i+4}$, donc les mesures des angles $\widehat{A_iA_{i+1}A_{i+2}}$ et $\widehat{A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}}$ sont égales, on note α cette mesure.
  On montre de même que la mesure des angles $\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$ et $\widehat{A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}}$ sont égales. On note β cette mesure.
  En utilisant le fait que la somme des angles d'un polygone à n faces vaut $(n-2)\pi$, on en déduit que $\alpha = \beta$, donc le polygone est régulier.

- On a montré que le rapport $\frac{\mathscr{L}^2(P)}{\mathscr{A}(P)}$ est maximal si, et seulement si, P est régulier. Il s'ensuit que pour tout polygone K,

$$\mathscr{L}^2(P) \geq 4n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathscr{A}(P).$$

$\square$

Avant de prouver la proposition 1.2, nous énonçons le lemme suivant dont la preuve est renvoyée à [1].

Lemme 2.2. *Aire d'un polygone*

L'aire d'un polygone $P = A_0A_1\dots A_{n-1}$ dont les sommets sont rangés dans le sens trigonométrique est donnée par $\mathscr{A}(P) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)(x_i+x_{i+1})$ où (x_i, y_i) est les coordonnées du sommet A_i.

Nous prouvons la proposition 1.2.

Démonstration. On écrit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. L'inégalité (1) appliquée au polygone $A_0A_1\dots A_{n-1}$ avec A_i le point de coordonnées $\gamma(t_{i,n}) = (x(t_{i,n}), y(t_{i,n}))$ donne

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{(x(t_{i+1,n})-x(t_{i,n}))^2+(y(t_{i+1,n})-y(t_{i,n}))^2}\right)^2 \geq 2n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1}(y(t_{i+1,n})-y(t_{i,n}))(x(t_{i+1,n})+x(t_{i,n})),$$

où l'on a posé $t_{i,n} := \dfrac{2i\pi}{n}$ et utilisé le lemme 2.2. En appliquant le théorème des accroissements finis, il existe $\alpha_{i,n}$ et $\beta_{i,n}$ dans $]t_{i,n}, t_{i+1,n}[$ tels que

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{x'(\alpha_{i,n})^2+y'(\beta_{i,n})^2}\right)^2 \geq 2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1}y'(\beta_{i,n})(x(t_{i+1,n})+x(t_{i,n})).$$

En multipliant par n, en faisant tendre n vers $+\infty$ et en reconnaissant des sommes de Riemann, on obtient

$$\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t\right)^2 \geq 4\pi\int_0^{2\pi}y'(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, d'après la formule de Green, $\displaystyle\int_0^{2\pi}y'(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{A}(C)$ et il est classique que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t = \mathscr{L}(C)$, d'où $\mathscr{L}(C)^2 \geq 4\pi\mathscr{A}(C)$.

□

Références

[1] *Mathématiques d'école : Nombres, mesures et géométrie*, D. Perrin, Cassini, 2011.