Formulaires

1 Primitives

1.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction	**Primitives**	**Intervalle**
$x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbf{N}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \leq -2$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}_+^\star$ ou $\mathbf{R}_-^\star$
$x \longmapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Z}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}_+$ si $\alpha > -1$, $\mathbf{R}_+^\star$ si $\alpha < -1$
$x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbf{R}^\star$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x} + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}_+^\star$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(\lvert x \rvert) + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}_-^\star$
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto x\ln(x) - x + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}_+^\star$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \tan(x)$	$x \longmapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$	$]-1, 1[$
$x \longmapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \longmapsto \mathrm{Arccos}(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$	$]-1, 1[$

1.2 Primitives de fonctions composées

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbf{R}$ et $u : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie et dérivable sur I. Soit $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur l'intervalle J tel que $u(I) \subset J$. On note F une primitive de f sur J.

Fonction	**Primitives**	**Intervalle**
$x \longmapsto u'(x)\, u^n(x)$, $n \in \mathbf{N}$	$x \longmapsto \dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c$, $c \in \mathbf{R}$	I
$x \longmapsto u'(x)\, u^n(x)$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \leq -2$	$x \longmapsto \dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c$, $c \in \mathbf{R}$	I et u ne s'annule pas sur I
$x \longmapsto u'(x)\, u^\alpha(x)$, $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$	$x \longmapsto \dfrac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$, $c \in \mathbf{R}$	I et u à valeurs strictement positives sur I
$x \longmapsto u'(x)\, \mathrm{e}^{u(x)}$	$x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)} + c$, $c \in \mathbf{R}$	I
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert u(x)\rvert) + c$, $c \in \mathbf{R}$	I et u ne s'annule pas sur I
$x \longmapsto f(u(x))\, u'(x)$	$x \longmapsto F(u(x)) + c$, $c \in \mathbf{R}$	I

2 Formules de trigonométrie

2.1 Addition d'un tour

1. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$;
2. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$;
3. $\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$.

2.2 Addition d'un demi-tour

1. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$;
2. $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$;
3. $\tan(x + \pi) = \tan(x)$.

2.3 Angle opposé

1. $\cos(-x) = \cos(x)$;
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$;
3. $\tan(-x) = -\tan(x)$.

2.4 Addition d'un quart de tour

1. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$;
2. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$;

2.5 Formules d'addition

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$; $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
2. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
3. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
4. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
5. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
6. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

2.6 Formules de linéarisation

1. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$;
2. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$;
3. $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$.

2.7 Formules de factorisation

1. $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
2. $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
3. $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
4. $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$;

3 Équivalents et développements limités

3.1 Équivalents usuels

On a les équivalents usuels suivants.

1. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$;
2. $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;
3. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
4. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
5. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
6. $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
7. $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$;
8. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ ($\alpha \in \mathbf{R}^\star$).

3.2 Développements limités usuels

On a les développements limités suivants ($n \in \mathbf{N}$).

1. $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$;
2. $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$;
3. $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
4. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
5. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
6. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$;
7. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$;
8. $\mathrm{Arctan}(x) = \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$;
9. $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$.

4 Développements en série entière usuel

Développement en série entière	Rayon de convergence	Intervalle ouvert de convergence
$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	$]-1, 1[$
$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$]-1, 1[$
$\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$]-1, 1[$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1	$]-1, 1[$
$\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbf{R}$
$\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbf{R}$
$\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbf{R}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)\right) \frac{x^n}{n!},\ \alpha \in \mathbf{R}$	1	$]-1, 1[$