Une nouvelle approche pour les équations cartésiennes de certains polygones

Erik Thomas*

Résumé

Le but de cette note est de donner une équation cartésienne pour une classe de polygone du plan euclidien.

Notre approche utilise la notion de droite pliée, notion définie ci-dessous.

1 Introduction

Dans toute la suite, le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le plan est alors orienté par ce repère.

Le but de cette note est de donner une équation cartésienne pour les polygones ayant des angles obtus. Plus précisément, nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Équation cartésienne d'un polygone*

Soit P un polygone à n ($n \geq 4$) sommets dont tous les angles sont obtus. Alors, il existe des réels $\theta_1, \dots, \theta_n, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ et des réels positifs $a_1, \dots, a_n$ tels que, pour tout point $M(x, y)$ du plan euclidien, $M \in P$ si, et seulement si,

$$\min \left\{ f_i(x, y)^2 + f_{i+1}(x, y)^2 \,,\ i \in [\![1, n]\!] \right\} = 0,$$

où l'on a posé $f_i(x, y) = -\sin(\theta_i)\, x + \cos(\theta_i)\, y + d_i - a_i |\cos(\theta_i)\, x + \sin(\theta_i)\, y + c_i|$ et $f_{n+1} = f_1$. L'addition et la soustraction des indices sera modulo n.

Remarque 1. La proposition précédente permet, en particulier de donner des équations cartésiennes pour les polygones réguliers.

Pour montrer cette proposition, nous utiliserons la notion de droite pliée, notion définie ci-dessous.

2 Les droites pliées

Définition 2.1. *Droite pliée*

Soient A, B et C trois points du plan non alignés. La droite pliée issue de A et dirigée par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est la réunion des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

Remarque 2.
- D'après la définition, une droite n'est pas une droite pliée.
- L'exemple « typique » d'une droite pliée est le graphe de la fonction valeur absolue.

Proposition 2.1. *Équation cartésienne d'une droite pliée*

Soit D une droite pliée du plan. Il existe des réels θ, c, d et un réel positif a tels qu'une équation cartésienne de D est

$$D : -\sin(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y + d - a |\cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, y + c| = 0.$$

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Démonstration. Soit D une droite pliée du plan. D'après la définition 2.1, on peut écrire $D = [AB) \cup [AC)$ avec les points A, B et C non alignés.

On note (x_0, y_0) les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Quitte à renommer les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, on suppose qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ appartient à $]0, \pi[$.

Soit Δ la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ et Δ' la perpendiculaire à Δ passant par A.

Soient I_1 et I_2 deux points respectivement de Δ' et Δ tels que le repère $\left(A, \overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI_2}\right)$ soit orthonormé direct.

Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI_2}\right)$, une équation de D est donnée par $Y = a|X|$ avec $a > 0$ car une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ appartient à $]0, \pi[$.

Soit M un point du plan dont on note (x, y) les coordonnées dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (X, Y) les coordonnées dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI_2}\right)$. Les formules de changement de repère assure qu'il existe un angle θ (indépendant de M) tel que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier, il existe deux réels c et d tels que :

$$\begin{cases} X & = \cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, y + c \\ Y & = -\sin(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y + d \end{cases}.$$

En remplaçant dans l'équation $Y = a|X|$, on en déduit qu'une équation cartésienne de D dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$$-\sin(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y + d = a|\cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, y + c|.$$

□

Remarque 3. La preuve donne $c = -\cos(\theta)\, x_0 - \sin(\theta)\, y_0$ et $d = \sin(\theta)\, x_0 - \cos(\theta)\, y_0$.

La proposition suivante, bien qu'elle ne nous servira pas, fait une analogie entre les droites et les droites pliées.

Proposition 2.2. *Séparation du plan par une droite pliée*

Soit D une droite pliée du plan dont une équation cartésienne est $-\sin(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y + d = a|\cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, y + c|$.

D sépare le plan en deux composantes connexes : l'une est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont l'inéquation $-\sin(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y + d > a|\cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, y + c|$ *et l'autre est l'ensemble des des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont l'inéquation* $-\sin(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y + d < a|\cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, y + c|$.

Démonstration.

- Soit $f_D : (x, y) \mapsto -\sin(\theta)\, x + \cos(\theta)\, y + d - a|\cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, y + c|$. Il est clair que f_D est continue sur $\mathbf{R}^2$.
- On peut se convaincre que D est homéomorphe à une droite du plan. Or, une droite du plan sépare le plan en deux composantes connexes, donc une droite pliée aussi. On note C_1 et C_2 les deux composantes connexes.
- Comme la fonction f s'annule uniquement sur D, f est de signe constant sur C_1 et sur C_2. Or,

$$\lim_{r \to +\infty} f(r \sin(\theta), 0) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r \to +\infty} f(-r \sin(\theta), r\cos(\theta)) = +\infty,$$

on en déduit que f est de signe différent sur C_1 et C_2.

□

3 Preuve du résultat principal

La clé de la preuve de la proposition 1.1 est le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soit $P := A_1 \dots A_n$ un polygone du plan euclidien dont tous les angles sont obtus. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note D_i la droite pliée issue de A_i et dirigée par les vecteurs $\overrightarrow{A_iA_{i-1}}$ et $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$.*

Alors, $P = \bigcup_{i=1}^{n} (D_i \cap D_{i+1})$.

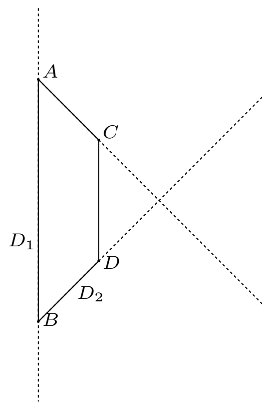
Démonstration. On prouve les deux inclusions.

($\subset$) Soit $M \in P$: il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $M \in [A_i, A_{i+1}[$. On a $M \in D_i \cap D_{i+1}$, donc $M \in \bigcup_{i=1}^{n} (D_i \cap D_{i+1})$.

($\supset$) Soit $M \in \bigcup_{i=1}^{n} (D_i \cap D_{i+1})$: il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $M \in D_j \cap D_{j+1}$. Ainsi, $M \in ([A_jA_{j-1}) \cup [A_jA_{j+1})) \cap ([A_{j+1}A_j) \cup [A_{j+1}A_{j+2})) = [A_jA_{j+1}]$ car P a des angles obtus. On a donc $M \in P$.

□

Remarque 4.
- L'égalité $([A_jA_{j-1}) \cup [A_jA_{j+1})) \cap ([A_{j+1}A_j) \cup [A_{j+1}A_{j+2})) = [A_jA_{j+1}]$ est *a priori* fausse si l'un des angles n'est pas obtus. On peut s'en convaincre avec le dessin suivant : dans cet exemple les droites pliées D_1 et D_2 issues respectivement de A et B dirigées par respectivement $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}$. L'intersection de ces deux droites pliées n'est pas réduite au segment $[AB]$.



- On remarque que l'égalité $P = \bigcup_{i=1}^{n} (D_i \cap D_{i+1})$ reste vraie dans le cas du triangle.

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 1.1.

Démonstration. On prouve les deux implications. Soit $M(x,y)$ un point du plan. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note D_i la droite pliée issue de A_i et dirigée par les vecteurs $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ et $\overrightarrow{A_iA_{i-1}}$. D'après la proposition, il existe des réels θ_i, c_i, d_i et un réel positif a_i tels que une équation cartésienne de D_i est

$$-\sin(\theta_i)\, x + \cos(\theta_i)\, y + d_i = a_i |\cos(\theta_i)\, x + \sin(\theta_i)\, y + c_i| = 0.$$

On pose $f_i : (x,y) \mapsto -\sin(\theta_i)\, x + \cos(\theta_i)\, y + d_i - a_i|\cos(\theta_i)\, x + \sin(\theta_i)\, y + c_i|$.

($\Leftarrow$) Supposons que $M \in P$. D'après le lemme 3.1, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $M \in D_i \cap D_{i+1}$. En particulier, $f_i(x,y) = f_{i+1}(x,y) = 0$, puis $f_i(x,y)^2 + f_{i+1}(x,y)^2 = 0$, puis

$$\min\left\{ f_i(x,y)^2 + f_{i+1}(x,y)^2 ,\ i \in [\![1,n]\!] \right\} = 0.$$

($\Rightarrow$) Supposons que $\min\left\{ f_i(x,y)^2 + f_{i+1}(x,y)^2 ,\ i \in [\![1,n]\!] \right\} = 0$. Il existe donc $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $f_i(x,y)^2 + f_{i+1}(x,y)^2 = 0$. Ainsi, M appartient à $D_i \cap D_{i+1}$. D'après le lemme 3.1, $M \in P$.

□

Remarque 5. Comme le lemme 3.1 reste vraie pour les triangles, la proposition 1.1 l'est également pour les triangles.

Exemple 1. On se propose de donner une équation cartésienne du carré dont les sommets ont pour coordonnées $A_1\left(1,0\right)$, $A_2\left(0,1\right)$, $A_3\left(-1,0\right)$ et $A_4\left(0,-1\right)$.

On note d_i la droite pliée issue de A_i et dirigée par $\overrightarrow{A_iA_{i-1}}$ et $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$.

De simples calculs donnent des équations cartésiennes de ces droites pliées, ainsi

$$D_1 : f_1\left(x,y\right) = |y| + x - 1 = 0,\ D_2 : f_2\left(x,y\right) = y + |x| - 1 = 0,\ D_3 : f_3\left(x,y\right) = |y| - x + 1 = 0$$

et

$$D_4 : f_4\left(x,y\right) = y - |x| + 1 = 0.$$

Comme tous les angles du carré sont obtus, d'après la proposition 1.1, une équation cartésienne du carré est donnée par :

$$\min\left\{f_i\left(x,y\right)^2 + f_{i+1}\left(x,y\right)^2,\ i \in [\![1,4]\!]\right\} = 0.$$

Par exemple, pour $i = 1$, on a $\begin{cases} |y| + x - 1 & = 0 \\ y + |x| - 1 & = 0 \end{cases}$. Il est facile de montrer que x et y sont positifs, donc le système précédent se réécrit en $|x| + |y| = 1$.

Les autres valeurs de i fournissent la même équation.

On retrouve ainsi l'équation du carré $|x| + |y| = 1$: c'est la boule centrée en O de rayon 1 pour la norme 1.