Discussions autour des inégalités de Poincaré

Erik Thomas*

Résumé

Dans cet article, nous nous intéressons à une famille d'inégalités de Poincaré sur $[0,1]$. Nous explicitons les constantes optimales dans certains cas. Nous énonçons aussi une inégalité de Poincaré pondérée. La preuve se base alors sur la diagonalisation d'un opérateur différentiel associé à une équation différentielle de Sturm-Liouville.

1 Introduction

1.1 Notations utilisées

- Si p est un réel de $[1,+\infty]$, on note p' le conjugué de Lebesgue défini par $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
- λ désigne la mesure de Lebesgue.
- $L^p([0,1])$ désigne l'ensemble des fonctions $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ mesurables telles que $\int_{[0,1]}|f(t)|^p\mathrm{d}t<+\infty$. On note alors
$$\|f\|_p := \left(\int_{[0,1]}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

1.2 But de cet article

Dans un premier temps (partie 2), nous établirons la proposition suivante dont la preuve est élémentaire.

Proposition 1.1. *Inégalités de Poincaré*

Pour tous p et q dans $[1,+\infty[$, il existe $c_{p,q}>0$ tel que pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et telle que $\int_{[0,1]}f(t)\mathrm{d}t=0$, on a :
$$\left\|f'\right\|_q \geq c_{p,q}\,\|f\|_p\,. \tag{1}$$

Dans une partie suivante (partie 3), nous nous intéresserons à la recherche des constantes optimales de l'inégalité (1) pour quelques valeurs de p et q.

Enfin, nous terminons dans une ultime partie (partie 4) par montrer des inégalités de Poincaré en ajoutant une fonction poids.

Proposition 1.2. *Inégalités de Poincaré pondérées*

Soit $\omega:[a,b]\to\mathbf{R}_+^\star$ une fonction mesurable telle que $\int_{[a,b]}\omega(t)\mathrm{d}t=1$. Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)=0$, on a :
$$\int_{[a,b]}f'^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t \geq \lambda_0\int_{[a,b]}f^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t,$$
où $\lambda_0>0$ est une constante qui sera précisée plus tard.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Ces inégalités sont déjà bien connues lorsque le poids est une fonction log-concave (i.e. du type e^{-V} où V est une fonction convexe).

Ici, nous enlevons cette hypothèse de log-concavité. L'étude consiste à faire le lien entre l'inégalité de Poincaré et à l'étude spectrale d'un opérateur différentiel associé à une équation différentielle de Sturm-Liouville.

Les approches spectrales pour établir des inégalités de Poincaré ne sont pas nouvelles (voir par exemple [3] pour une bonne introduction et voir [7] pour une introduction dans le cas discret). Il semblerait néanmoins que ce soit, à notre connaissance, la première fois qu'un lien soit fait avec les équations de Sturm-Liouville.

De ce fait, il est peu probable qu'un tel résultat se généralise à des dimensions supérieures.

2 Cas des inégalités de Poincaré non pondérées

Dans cette partie, nous établissons la proposition 1.1. La preuve est très élémentaire et se base sur l'inégalité de Hölder et la dualité des espaces L^p.

Démonstration. Soit $g \in L^{p'}([0,1])$. Comme $\int_{[0,1]} f = 0$, on remarque pour tout réel c, $\int_{[0,1]} fg = \int_{[0,1]} f(g-c)$. On peut donc supposer que $\int_{[0,1]} g = 0$.

Soit $G : t \mapsto \int_{[0,t]} g(u)\mathrm{d}u$. Une intégration par parties donne

$$\int_{[0,1]} fg = [fG]_0^1 - \int_{[0,1]} \int_{[0,t]} f'(t)g(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}t = -\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,t]} f'(t)g(u)\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t.$$

Il s'ensuit que

$$\left| \int_{[0,1]} fg \right| \leq \int_{[0,1]} |f'(t)| \left(\int_{[0,t]} |g(u)|\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t.$$

L'inégalité de Hölder donne alors

$$\int_{[0,t]} |g(u)|\,\mathrm{d}u \leq \left(\int_{[0,t]} |g(u)|^{p'} \mathrm{d}u \right)^{1/p'} t^{1/p} \leq \|g\|_{p'}\, t^{1/p}.$$

Il s'ensuit que

$$\left| \int_{[0,1]} fg \right| \leq \|g\|_{p'} \left(\int_{[0,1]} |f'(t)|\, t^{1/p}\mathrm{d}t \right).$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Hölder donne

$$\left| \int_{[0,1]} fg \right| \leq \|g\|_{p'} \|f'\|_q \left(\int_{[0,1]} t^{q'/p}\mathrm{d}t \right)^{1/q'} = \left(\frac{p(q-1)}{q+p(q-1)} \right)^{(q-1)/q} \|g\|_{p'} \|f'\|_q. \tag{2}$$

En utilisant le résultat de dualité $\|f\|_p = \sup_{\substack{g \in L^{p'}([0,1]) \\ \|g\|_{p'} \leq 1}} \left| \int_{[0,1]} fg \right|$, en prenant la borne supérieure dans l'inégalité (2) pour $\|g\|_{p'} \leq 1$, on a :

$$\|f\|_p \leq \left(\frac{p(q-1)}{q+p(q-1)} \right)^{(q-1)/q} \|f'\|_q,$$

soit

$$\|f'\|_q \geq \left(\frac{q+p(q-1)}{p(q-1)} \right)^{(q-1)/q} \|f\|_p.$$

On en déduit en particulier que l'on peut prendre $c_{p,q} = \left(\dfrac{q+p(q-1)}{p(q-1)}\right)^{(q-1)/q}$ et la meilleure constante $c_{p,q}$ (i.e. la plus grande) qui vérifie l'inégalité (1) est plus grande que $\left(\dfrac{q+p(q-1)}{p(q-1)}\right)^{(q-1)/q}$.

$\square$

3 À la recherche de quelques constantes optimales

La proposition 1.1 assure l'existence d'une constante $c_{p,q} > 0$, donne de fait une minoration de la meilleure constante, mais ne permet *a priori* pas de la calculer. Dans toute la suite, la meilleure constante (i.e. la plus grande) dans l'inégalité (1) sera notée $d_{p,q}$.

Nous allons examiner quelques cas particuliers.

3.1 Le cas $p = \infty$ et $q = 1$

Ce cas n'est pas traité par la proposition 1.1. On le traite ci-dessous.

Proposition 3.1. *On a* $d_{\infty,1} = 1$.

Démonstration. Pour tous x et y dans $[0,1]$, on peut écrire :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_{[y,x]} f'(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_{[0,1]} |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_1$. On remarque que si l'on pose $u : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1/2[\\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$, on a bien $\displaystyle\int_{[0,1]} u(t)\mathrm{d}t = 0$ et u vérifie bien $\|u\|_\infty = \|u'\|_1$. Il s'ensuit que $d_{\infty,1} = 1$.

$\square$

Remarque 1. Le lecteur observera que la fonction u proposée ci-dessus n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$. Nous laissons au lecteur le soin de régulariser la fonction (en convolant par exemple par un noyau régularisant, voir [2]) pour obtenir une fonction $\mathscr{C}^1$.

3.2 Le cas $p = q = 1$

Ce cas reste un cas classique car la constante $d_{1,1}$ est liée à la résolution du problème isopérimétrique sur $[0,1]$.

Proposition 3.2. *On a* $d_{1,1} = 2$.

Avant de prouver la proposition 3.2, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 3.1. *Valeur médiane*
Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *une fonction borélienne. Soit* $m \in \mathbf{R}$.
On dit que m *est une valeur médiane de* f *pour la mesure* λ *si :*

$$\forall t \geq m, \quad \lambda\{f > t\} \leq \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \forall t < m, \quad \lambda\{f > t\} > \frac{1}{2}.$$

Nous utiliserons aussi les trois propositions suivantes.

Proposition 3.3. *Formule de la co-aire*
Soient $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ *mesurable et* $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}$. *Alors*

$$\int_{\mathbf{R}} |u'(x)|\, h(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{u^{-1}(\{t\})} h(x)\, \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x) \right) \mathrm{d}t \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

où ∂A est le bord topologique de A défini par $\partial A := \mathrm{adh}\,(A) \setminus \mathrm{int}\,(A)$ (l'adhérence privé de l'intérieur) et $\mathscr{H}^0$ est la mesure de Hausdorff 0-dimensionnelle. On peut montrer (voir [4]) que $\mathscr{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbf{R}$, i.e.

$$\forall A \subset \mathbf{R}, \quad \mathscr{H}^0\,(A) = \begin{cases} \mathrm{card}\,(A) & \textit{si } A \textit{ est fini} \\ +\infty & \textit{si } A \textit{ n'est pas fini} \end{cases}.$$

Nous renvoyons la preuve à [4].

Proposition 3.4. *Représentation en « mille-feuille »*
Soit $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in L^1\,(\mu)$ à valeurs positives. Alors

$$\int_X f\,(x)\,\mathrm{d}\mu\,(x) = \int_{]0,+\infty[} \mu\,(\{f > t\})\,\mathrm{d}t.$$

Nous renvoyons la preuve à [6].
Voici la dernière proposition qui nous servira.

Proposition 3.5. *Soit $f \in L^1([0,1])$. Soit m une valeur médiane de f pour la mesure λ. On a :*

$$\int_{[0,1]} \left| f(t) - \int_{[0,1]} f \right| \mathrm{d}t \leq 2 \int_{[0,1]} |f(t) - m|\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On commence par écrire

$$\left| \int_{[0,1]} f(t)\mathrm{d}t - m \right| \leq \int_{[0,1]} |f(t) - m|\,\mathrm{d}t.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le précédent calcul :

$$\int_{[0,1]} \left| f(t) - \int_{[0,1]} f \right| \leq \int_{[0,1]} |f(t) - m| + \left| m - \int_{[0,1]} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq 2 \int_{[0,1]} |f(t) - m|\,\mathrm{d}t.$$

□

Nous passons à la preuve de la proposition 3.2.

Démonstration. On note λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On introduit la mesure λ^+ de bord par : pour tout $A \subset [0,1]$

$$\lambda^+\,(A) := \int_{\partial A} \mathrm{d}\mathscr{H}^0\,(t)\,.$$

Soit A un borélien de $[0,1]$ dont on note t la mesure. On suppose $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Soit $B' := [0,t]$ de sorte que $\lambda(B) = \lambda(B')(= t)$.

Comme $\partial B' = \{0, t\}$, on a $\lambda^+(B') = 2$, il s'ensuit que

$$\lambda^+(B) \geq \lambda^+(B') \geq 4t. \tag{3}$$

La constante 4 dans l'inégalité (3) est évidemment optimale : il suffit de prendre $B = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Si B est un borélien de mesure comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, on applique l'inégalité (3) à $\overline{B}$ (le complémentaire), on obtient finalement : pour tout borélien B de $[0,1]$,

$$\lambda^+\,(B) \geq 4 \min\{\lambda\,(B)\,, 1 - \lambda\,(B)\}\,. \tag{4}$$

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Soit m une valeur médiane de u pour la mesure λ. Quitte à considérer $\widetilde{u} := u - m$ dont une valeur médiane est 0 et vérifiant $\widetilde{u}' = u'$, on peut supposer qu'une valeur médiane de

u pour la mesure λ est 0. Pour alléger les notations, on pose $I := \int_{[0,1]} |u'(t)| \,\mathrm{d}t$. La formule de la co-aire (proposition 3.3) donne

$$I = \int_{[0,1]} |u'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{u^{-1}(\{t\})} \mathrm{d}\mathscr{H}^0(x) \right) \mathrm{d}t.$$

En remarquant que le bord de l'ensemble $\{u > t\} = \{x \in \mathbf{R},\ u(x) > t\}$ (par continuité de u) est $u^{-1}(\{t\})$ et par définition de λ^+, on a

$$\int_{[0,1]} |u'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} \lambda^+ (\{u > t\}) \,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

D'après la ligne (4), on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \lambda^+ (\{u > t\}) \geq 4 \min \{\lambda (\{u > t\}), 1 - \lambda (\{u > t\})\}.$$

Cette ligne utilisée dans (5) donne

$$I \geq 4 \int_{\mathbf{R}} \min \{\lambda (\{u > t\}), 1 - \lambda (\{u > t\})\} \,\mathrm{d}t,$$

soit

$$I \geq 4 \int_{\mathbf{R}} \min \{\lambda (\{u > t\}), \lambda (\{u \leq t\})\} \,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Or, 0 est une valeur médiane de u pour la mesure λ, pour tout $t < 0$, $\lambda (\{u > t\}) > \frac{1}{2}$ et pour tout $t \geq 0$, $\lambda (\{u > t\}) \leq \frac{1}{2}$, ainsi

$$\int_{]-\infty,0[} \min \{\lambda (\{u > t\}), \lambda (\{u \leq t\})\} \,\mathrm{d}t = \int_{]-\infty,0[} \lambda (\{u \leq t\}) \,\mathrm{d}t \tag{7}$$

et

$$\int_{]0,+\infty[} \min \{\lambda (\{u > t\}), \lambda (\{u \leq t\})\} \,\mathrm{d}t = \int_{]0,+\infty[} \lambda (\{u > t\}) \,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

En utilisant les fonctions $u^+ := \max\{u, 0\}$ et $u^- := \max\{-u, 0\}$ de sorte que $u = u^+ - u^-$ et $|u| = u^+ + u^-$, on a

$$\int_{]-\infty,0[} \lambda (\{u \leq t\}) \,\mathrm{d}t = \int_{]-\infty,0[} \lambda \left(\{-u^- \leq t\}\right) \mathrm{d}t \tag{9}$$

et

$$\int_{]0,+\infty[} \lambda (\{u > t\}) \,\mathrm{d}t = \int_{]0,+\infty[} \lambda \left(\{u^+ > t\}\right) \mathrm{d}t. \tag{10}$$

Le changement de variable $x = -t$ dans (9) donne

$$\int_{]-\infty,0[} \lambda (\{u \leq t\}) \,\mathrm{d}t = \int_{]0,+\infty[} \lambda \left(\{u^- \geq x\}\right) \mathrm{d}x.$$

Puis, la croissance de la mesure donne

$$\int_{]-\infty,0]} \lambda (\{u \leq t\}) \,\mathrm{d}t \geq \int_{]0,+\infty[} \lambda \left(\{u^- > x\}\right) \mathrm{d}x. \tag{11}$$

La proposition 3.4 appliquée aux fonctions positives u^+ et u^- dans les lignes (10) et (11) donne

$$\int_{]0,+\infty[} \lambda (\{u > t\}) \,\mathrm{d}t = \int_{[0,1]} u^+ (t) \,\mathrm{d}t \tag{12}$$

et

$$\int_{]-\infty,0[} \lambda (\{u \leq t\}) \,\mathrm{d}t \geq \int_{[0,1]} u^- (t) \,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

L'utilisation de (12) et (13) dans (7) et (8) donne

$$\int_{]-\infty,0[} \min\left\{\lambda\left(\{u>t\}\right),\lambda\left(\{u\leq t\}\right)\right\} \mathrm{d}t \geq \int_{[0,1]} u^{-}\left(t\right) \mathrm{d}t$$

et

$$\int_{]-\infty,0[} \min\left\{\lambda\left(\{u>t\}\right),\lambda\left(\{u\leq t\}\right)\right\} \mathrm{d}t \geq \int_{[0,1]} u^{+}\left(t\right) \mathrm{d}t.$$

Comme $|u| = u^{+} + u^{-}$, la somme de ces deux lignes utilisée dans (6) donne

$$\int_{[0,1]} |u'(t)| \mathrm{d}t \geq 4 \int_{[0,1]} |u\left(t\right)| \mathrm{d}t.$$

Pour conclure, on utilise la proposition 3.5, ce qui permet d'écrire

$$\int_{[0,1]} |u'(t)| \mathrm{d}t \geq 2 \int_{[0,1]} \left| u\left(t\right) - \int_{[0,1]} u \right| \mathrm{d}t. \tag{14}$$

Pour montrer que la constante 2 est optimale, il suffit de trouver une fonction qui réalise l'égalité dans la ligne (14). Pour cela, on introduit $u := \mathbf{1}_{[0,1/2]}$ l'indicatrice du segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On a :

$$\int_{[0,1]} \left| u(t) - \int_{[0,1]} \right| \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} \left| u'(t) \right| \mathrm{d}t = 1,$$

ce qui termine de prouver que $d_{1,1} = 2$.

$\square$

Remarque 2. Le lecteur sera peut-être surpris de voir que l'on affirme que $\int_{[0,1]} \left|u'(t)\right| \mathrm{d}t = 1$ pour la fonction $u = \mathbf{1}_{[0,1/2]}$ qui n'est pas $\mathscr{C}^1$ au sens classique. Il y a (au moins) deux moyens de rendre légitime ce résultat :

- convoler $\mathbf{1}_{[0,1/2]}$ par un noyau régularisant ρ_ε pour obtenir une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et faire ε vers 0 (voir [2]) ;
- remarquer que, au sens des distributions, $u' = \delta_{1/2}$ (mesure de Dirac) et interpréter $\int_{[0,1]} \left|u'(t)\right| \mathrm{d}t = 1$ comme une application de la formules des sauts (voir [1]).

4 Et si l'on pondère ?

On se place sur un segment $[a, b]$. Soit $\omega : [a, b] \to \mathbf{R}_+^\star$ une fonction intégrable telle que $\int_{[a,b]} \omega(t) \mathrm{d}t = 1$. On écrit $\omega(x) = \mathrm{e}^{-\alpha(x)}$ avec α une fonction définie sur $[a, b]$ que l'on suppose de classe $\mathscr{C}^1$.

On note $L^2(\omega)$ l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables à valeurs réelles f telles que $\int_{[a,b]} f^2(t)\omega(t) \mathrm{d}t < +\infty$. $L^2(\omega)$ munit du produit scalaire $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle_\omega := \int_{[a,b]} f(t)g(t)\omega(t) \mathrm{d}t$ est alors un espace de Hilbert.

On pose $E := \left\{f \in \mathscr{C}^2([a, b]),\ f(a) = f(b) = 0\right\}$. Sur E, on introduit l'opérateur L défini par

$$L(f) := \frac{1}{\omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\omega(x) \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) = f''(x) - \alpha'(x) f'(x).$$

L est donc un opérateur non borné de $L^2(\omega)$. On remarque que L est auto-adjoint. En effet, si l'on se donne f et g deux éléments de E, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\langle L(f), g\rangle_\omega &= \int_{[a,b]} L(f)(x)g(x)\omega(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{[a,b]} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\omega(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) g(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{[a,b]} f'(x)g'(x)\omega(x)\mathrm{d}x \\ &= \langle f, L(g)\rangle_\omega .\end{aligned}$$

Le précédent calcul assure aussi que $-L$ est un opérateur positif car

$$\langle -L(f), f\rangle_\omega = \int_{[a,b]} f'^2(x)\omega(x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

Les valeurs propres λ de $-L$ sont données par la relation

$$-L(f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\omega(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \lambda\omega(x)y. \tag{15}$$

On reconnaît une équation différentielle de Sturm-Liouville. Ainsi, $-L$ se diagonalise (voir par exemple [5]) dans $L^2(\omega)$: il existe une suite croissante $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, une base hilbertienne de $L^2(\omega)$ de fonctions propres $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $-L(y_n) = \lambda_n y_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

On remarque que le noyau de L est réduit à $\{0\}$. En effet, si $f \in \mathrm{Ker}\,(L)$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\omega(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

Il existe donc deux constantes α et β tels que

$$f(x) = \alpha\int_{[a,x]} \frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} + \beta.$$

Comme $f(a) = f(b) = 0$, on en déduit que $f = 0$. Cela assure en particulier que λ_0.

On peut alors établir la proposition 1.2.

Démonstration. Soit $f \in E$. On décompose f suivant la base hilbertienne $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$: on écrit $f = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n(f)y_n$ où $(a_n(f))_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $a_n(f) = \int_{[a,b]} f(t)y_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t$. Comme $\lambda_n > 0$ pour $n \geq 0$, on peut écrire

$$a_n(f) = \int_{[a,b]} f(t)y_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda_n}\int_{[a,b]} f(t)L(y_n)(t)\omega(t)\mathrm{d}t.$$

Comme L est auto-adjoint, on a :

$$a_n(f) = -\frac{1}{\lambda_n}\int_{[a,b]} L(f)(t)y_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t,$$

ce qui prouve que

$$\forall n \geq 0, \quad a_n(L(f)) = -\lambda_n a_n(f).$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f'^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t &= \langle -L(f), f\rangle_\omega \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-L(f))a_n(f) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n a_n(f)^2 \\
&\geq \lambda_0 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)^2 \\
&= \lambda_0 \int_{[a,b]} f^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

Références

[1] J.-M. Bony, *Cours d'analyse-Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2001.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 2005.

[3] D. Cordero-Erausquin, `https://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/Docs/M2/2020_2021/chap5_new.pdf`

[4] H. Federer, *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K., 1969.

[5] G. Leborgne, `https://perso.isima.fr/~gileborg/IsimathPH/edpph.pdf`

[6] E. Thomas, *Sur l'inégalité isopérimétrique gaussienne*, Quadrature numéro 118, 2020.

[7] E. Thomas, *Inégalités sur le cercle discret*, à paraître dans Quadrature numéro 121, 2021.