

# Chapitre 1 : Compléments d'algèbre linéaire

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels d'algèbre linéaire et généralités sur les familles de vecteurs d'un espace vectoriel</b>	<b>2</b>
1.1	Généralités sur les sous-espaces vectoriels . . . . .	2
1.2	Famille libre/famille liée . . . . .	2
1.3	Famille génératrice . . . . .	4
1.4	Bases . . . . .	4
1.5	Rappels sur les applications linéaires . . . . .	5
1.6	Matrice d'une application linéaire . . . . .	7
1.7	Rappels sur les formules de changement de bases . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Sous-espaces vectoriels</b>	<b>11</b>
2.1	Somme de sous-espaces vectoriels . . . . .	11
2.2	Hyperplans d'un espace vectoriel . . . . .	13
2.3	Sous-espaces stables . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Matrices</b>	<b>16</b>
3.1	Trace d'une matrice carrée . . . . .	16
3.2	Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie . . . . .	17
3.3	Transposée d'une matrice . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Compléments</b>	<b>19</b>
4.1	Polynômes d'interpolation de Lagrange . . . . .	19
4.2	Endomorphismes nilpotents . . . . .	21
4.3	Introduction à la dualité . . . . .	22

Dans tout le chapitre,  $\mathbf{K}$  est le corps  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . On fixe  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbf{K}$ .

# 1 Rappels d'algèbre linéaire et généralités sur les familles de vecteurs d'un espace vectoriel

## 1.1 Généralités sur les sous-espaces vectoriels

La définition d'un espace vectoriel a été vue en TSI 1, nous n'allons pas revenir dessus surtout qu'elle est longue. Rappelons néanmoins quelques exemples d'espaces vectoriels qu'il **faudrait** connaître.

*Exemple 1.* 1.  $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$  l'ensemble des  $n$ -uplets ;

2.  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot)$  l'ensemble des matrices de taille  $n \times p$  ;

3.  $(\mathbf{K}[X], +, \cdot)$  et  $(\mathbf{K}_n[X], +, \cdot)$  l'ensemble des polynômes (resp. de degré au plus  $n$ ) à coefficients dans  $\mathbf{K}$  ;

4.  $(\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}), +, \cdot)$  ( $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ ) l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  ;

5.  $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$  l'ensemble des suites à coefficients dans  $\mathbf{K}$ .

On peut alors définir la notion de sous-espaces vectoriels.

**Définition 1.** *Sous-espace vectoriel.*

Soit  $E$  un espace vectoriel et soit  $F \subset E$ . On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si :

1.  $0 \in F$  ;

2. pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $(x, y \in F) \implies (x + y \in F)$  ;

3. pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbf{K}$ ,  $(x \in F) \implies (\lambda x \in F)$  ;

La proposition suivante permet de simplifier (un peu) la définition précédente. Elle sera d'une utilisation systématique.

**Proposition 1.** *Soit  $E$  un espace vectoriel et soit  $F$  une partie de  $E$ .  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si, et seulement si :*

1.  $0 \in F$  ;

2. pour tout  $(x, y) \in E^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbf{K}$ ,  $(x, y \in F) \implies (x + \lambda y \in F)$ .

La prochaine proposition est très utile en pratique et est d'un usage systématique : pour montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel, on montre qu'elle est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

**Proposition 2.** *Soit  $E$  un espace vectoriel et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors,  $F$  est un espace vectoriel pour les mêmes lois que celles de  $E$ .*

*Exemple 2.* 1. Soit  $E = \mathbf{K}^3$  et soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3, x + y + z = 0\}$ . Montrons que  $F$  est un espace vectoriel. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Il est clair que  $0 \in F$ . Soit  $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \in F^2$  et soit  $\lambda \in \mathbf{K}$ , montrons que  $(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \in F$  On a :

$$x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2 = (x_1 + y_1 + z_1) + \lambda(x_2 + y_2 + z_2) = 0 + \lambda \times 0 = 0.$$

2. Soit  $E = \mathbf{K}[X]$  et soit  $F = \{P \in E, P(2) = 0\}$ . Montrons que  $F$  est un espace vectoriel. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Il est clair que  $0 \in F$ . Soit  $(P, Q) \in F^2$  et soit  $\lambda \in \mathbf{K}$ , montrons que  $P + \lambda Q \in F$ . On a :

$$(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0 + \lambda \times 0 = 0.$$

## 1.2 Famille libre/famille liée

L'année dernière, vous avez vu la notion de famille libre pour les familles **finies** de vecteurs. On généralise la définition à des familles quelconques.

**Définition 2.** Famille libre, liée.

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .

1. On dit que la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est **libre** si, pour tout  $J \subset I$  **fini**, la famille  $(x_i)_{i \in J}$  est libre. Autrement dit,

$$\forall J \subset I \text{ fini}, \forall (\lambda_i)_{i \in J} \in \mathbf{K}^J, \left( \sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0 \right) \implies \forall i \in J, \lambda_i = 0. \quad (1)$$

2. La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est **liée** si elle n'est pas libre. Si l'on considère la négation de (1),  $(x_i)_{i \in I}$  est liée si :

$$\exists J \subset I \text{ fini}, \exists (\lambda_i)_{i \in J}, \sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \exists i_0 \in J, \lambda_{i_0} \neq 0. \quad (2)$$

La proposition suivante permet de caractériser facilement les familles liées.

**Proposition 3.** Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs est combinaison linéaire (nécessairement finie) des autres.

*Démonstration.* On rédige la preuve en deux temps.

$\implies$  Par définition, il existe  $J \subset I$  fini, il existe  $(\lambda_i)_{i \in J}$ , il existe  $i_0 \in J$  tels que

$$\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{i_0} \neq 0.$$

On peut alors écrire  $x_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq i_0}} \lambda_i x_i$  :  $x_{i_0}$  est donc combinaison linéaire d'éléments de  $(x_i)_{i \in I}$ .

$\impliedby$  Si l'un des vecteurs (par exemple  $x$ ) est combinaison linéaire des autres, alors il existe  $J \subset I$  fini et  $(\lambda_i)_{i \in J}$  tel que  $x = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i$ . Autrement dit, on a  $x - \sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0$ . Comme  $1 \neq 0$ , en utilisant (2), on en déduit que la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est liée. □

*Exemple 3.* Les familles suivantes sont libres :

1. la famille  $(X^{2k})_{k \in \mathbf{N}}$  dans  $\mathbf{K}[X]$  ;
2. la famille  $(x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbf{R}}$  dans l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  ;
3. la famille  $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbf{R}}$  dans l'ensemble des applications de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}$ .

Les familles suivantes sont liées :

1. la famille  $(X + a)_{a \in \mathbf{R}}$  est liée ;
2. toute famille infinie dans un espace vectoriel de dimension finie.

La proposition suivante donne une condition **suffisante** agréable pour justifier qu'une famille de polynômes est libre.

**Proposition 4.** Toute famille de polynômes non nuls de  $\mathbf{K}[X]$ , échelonnée en degré, est libre.

*Remarque 1.* On rappelle qu'une famille de polynôme est dite échelonnée en degré si les polynômes de cette famille sont de degré deux à deux distincts.

*Démonstration.* Soit  $(P_i)_{i \in I}$  une famille de polynômes échelonnée en degré. Soit  $J \subset I$  fini. Montrons que  $(P_i)_{i \in J}$  est libre. Soit  $(\lambda_i)_{i \in J} \in \mathbf{K}^J$  tel que  $\sum_{i \in J} \lambda_i P_i = 0$ .

Supposons qu'il existe  $j \in J$  tel que  $\lambda_j \neq 0$ . Soit  $A = \{i \in J, \lambda_i \neq 0\} \neq \emptyset$  et soit  $k \in A$  tel que  $\deg(P_k)$  soit maximal. Il s'ensuit que  $P_k = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq k}} \lambda_i P_i$ .

Par définition  $\deg\left(-\frac{1}{\lambda_k} \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq k}} \lambda_i P_i\right) < \deg(P_k)$  car  $P_k$  n'est pas nul, ce qui est exclu.

□

### 1.3 Famille génératrice

**Définition 3.** *Famille génératrice.*

Une famille  $\mathcal{F}$  de vecteurs de  $E$  est dite **génératrice** si tout élément de  $E$  s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{F}$ .

*Exemple 4.* Les familles suivantes sont génératrices :

1. la famille  $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$  est génératrice de  $\mathbf{K}[X]$  ;
2. la famille  $(x)_{x \in E}$  est génératrice de  $E$ .

**Définition 4.** *Espace vectoriel de dimension finie.*

Un espace vectoriel  $E$  est dit de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

*Exemple 5.* 1.  $\mathbf{K}^n$  est de dimension finie ;

2.  $\mathbf{K}_n[X]$  est de dimension finie ;
3.  $\mathbf{K}[X]$  n'est pas de dimension finie.

### 1.4 Bases

**Définition 5.** *Base.*

Une famille  $\mathcal{B}$  d'éléments de  $E$  est une **base** de  $E$  si elle est libre et génératrice.

La proposition suivante permet de caractériser les bases d'un espace vectoriel.

**Proposition 5.** *Une famille d'éléments  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  de  $E$  est une base si, et seulement si, tout élément de  $E$  s'écrit comme une combinaison linéaire unique d'éléments de  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* On prouve la proposition en deux temps.

⇒ Soit  $x \in E$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , c'est donc une famille génératrice. Ainsi,  $x$  s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de  $E$ .

Montrons l'unicité. Supposons que

$$x = \sum_{i \in J_1} \lambda_i e_i = \sum_{i \in J_2} \mu_i e_i$$

où  $J_1$  et  $J_2$  sont deux ensembles finis et  $(\lambda_i)_{i \in J_1} \in \mathbf{K}^{J_1}$  et  $(\mu_j)_{j \in J_2} \in \mathbf{K}^{J_2}$ . Quitte à retirer les éléments nuls, on peut supposer que pour tout  $i \in J_1$ ,  $\lambda_i \neq 0$  et pour tout  $j \in J_2$ ,  $\mu_j \neq 0$ . On pose  $J_3 = J_1 \cup J_2$  et on définit la famille  $(\alpha_i)_{i \in J_3} \in \mathbf{K}^{J_3}$  par :

$$\forall i \in J_3, \quad \alpha_i = \begin{cases} \lambda_i - \mu_i & \text{si } i \in J_1 \cap J_2 \\ \lambda_i & \text{si } J_1 \setminus (J_1 \cap J_2) \\ -\mu_i & \text{si } J_2 \setminus (J_1 \cap J_2) \end{cases}$$

de sorte que

$$0 = \sum_{i \in J_3} \alpha_i e_i.$$

Comme  $\mathcal{B}$  est une base, c'est une famille libre, on a

$$\forall i \in J_3, \quad \alpha_i = 0.$$

Or, pour tout  $i \in J_1$ ,  $\lambda_i \neq 0$  et pour tout  $j \in J_2$ ,  $\mu_j \neq 0$ , ainsi  $J_1 \setminus (J_1 \cap J_2) = J_2 \setminus (J_1 \cap J_2) = \emptyset$ , donc  $J_1 = J_2$ .

On récupère aussi, pour tout  $i \in J_1 = J_2$ ,  $\lambda_i = \mu_i$ .

⇐ La famille est clairement génératrice, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit  $J \subset I$  fini et  $(\lambda_i)_{i \in J} \in \mathbf{K}^J$  tel que  $\sum_{i \in J} \lambda_i e_i = 0$ . Or,

$$0 = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i = \sum_{i \in J} 0.$$

Par unicité de l'écriture, on en déduit que pour tout  $i \in J$ ,  $\lambda_i = 0$ . □

*Exemple 6.* La famille  $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une base de  $\mathbf{K}[X]$  appelée **base canonique** de  $\mathbf{K}[X]$ .

La proposition suivante permet de généraliser la base donnée par la base canonique.

**Proposition 6.** *Exemples de bases de  $\mathbf{K}[X]$ .*

Soit  $(P_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une famille de  $\mathbf{K}[X]$  telle que  $\deg(P_k) = k$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ .

Alors,  $(P_k)_{k \in \mathbf{N}}$  est une base de  $\mathbf{K}[X]$ .

*Démonstration.* On montre que la famille est libre et génératrice.

**Libre.** D'après la proposition 4,  $(P_k)_{k \in \mathbf{N}}$  est libre.

**Génératrice.** Soit  $P \in \mathbf{K}[X]$  et soit  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $P \in \mathbf{K}_n[X]$ .

La famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une famille libre de  $\mathbf{K}_n[X]$  contenant  $n + 1$  éléments. Comme  $\dim(\mathbf{K}_n[X]) = n + 1$ , c'est une base de  $\mathbf{K}_n[X]$ .

En particulier, c'est une famille génératrice de  $\mathbf{K}_n[X]$ , donc  $P$  s'écrit comme une combinaison linéaire de  $(P_0, \dots, P_n)$ , donc de la famille  $(P_k)_{k \in \mathbf{N}}$ . □

La proposition suivante est fondamentale dans toute la suite du cours.

**Proposition 7.** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.*

*Alors,  $E$  admet des bases finies. De plus, toutes les bases de  $E$  sont finies et contiennent le même nombre d'éléments.*

*Démonstration.* Admis. □

**Définition 6.** *Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.*

*Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. D'après la proposition 7, toutes les bases de  $E$  sont finies et contiennent le même nombre d'éléments. Ce nombre commun est appelé la **dimension** de  $E$ .*

*Exemple 7.* 1.  $\dim(\mathbf{K}^n) = n$ ;

2.  $\dim(\mathbf{K}_n[X]) = n + 1$ ;

3.  $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})) = np$ .

## 1.5 Rappels sur les applications linéaires

On rappelle qu'un espace vectoriel de dimension finie admet des bases finies et celles-ci ont toutes le même nombre d'éléments.

**Définition 7.** *Application linéaire.*

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $u : E \rightarrow F$  une application. On dit que  $u$  est **linéaire** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

*Remarque 2.* Pour montrer qu'une application  $u$  est linéaire, il suffit de montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

*Exemple 8.* 1. Soit  $u : \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^2$  définie par : pour tout  $(x, y, z) \in \mathbf{K}^3$ ,  $u(x, y, z) = (x + y, y - z)$ .  $u$  est linéaire.

En effet, soit  $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \in (\mathbf{K}^3)^2$  et soit  $\lambda \in \mathbf{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} u((x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)) &= u(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \\ &= (x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2, y_1 + \lambda y_2 - (z_1 + \lambda z_2)) \\ &= (x_1 + y_1 + \lambda(x_2 + y_2), y_1 - z_1 + \lambda(y_2 - z_2)) \\ &= (x_1 + y_1, y_1 - z_1) + \lambda(x_2 + y_2, y_2 - z_2) \\ &= u(x_1, y_1, z_1) + \lambda u(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

On a montré que  $u$  est linéaire.

2. Soit  $u : \mathbf{K}[X] \rightarrow \mathbf{K}$  définie par : pour tout  $P \in \mathbf{K}[X]$ ,  $u(P) = P'(0)$ .  $u$  est linéaire.

Soit  $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$  et soit  $\lambda \in \mathbf{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} u(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)'(0) \\ &= (P' + \lambda Q')(0) \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= P'(0) + \lambda Q'(0) \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$

On a montré que  $u$  est linéaire.

3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et soit  $u : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  définie par : pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ,  $u(M) = AM - MA$ .  $u$  est linéaire.

En effet, soit  $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$  et soit  $\lambda \in \mathbf{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} u(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) - (M + \lambda N)A \\ &= AM + \lambda AN - MA - \lambda NA \\ &= AM - MA + \lambda(AN - NA) \\ &= u(M) + \lambda u(N). \end{aligned}$$

**Définition 8.** *Noyau d'une application linéaire.*

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels et soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. On définit son **noyau** noté  $\text{Ker}(u)$  par :

$$\text{Ker}(u) = \{x \in E, u(x) = 0\}.$$

*Exemple 9.* 1. Soit  $u : \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^2$  définie par : pour tout  $(x, y, z) \in \mathbf{K}^3$ ,  $u(x, y, z) = (x - y, y - z)$ . On admet que  $u$  est linéaire et on se propose de déterminer son noyau.

Soit  $(x, y, z) \in \mathbf{K}^3$ . On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(u) &\iff u(x, y, z) = (0, 0) \\ &\iff (x - y, y - z) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z \\ &\iff (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1). \end{aligned}$$

On en déduit que  $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(1, 1, 1)$ .

On notera que l'on a donné une base de  $\text{Ker}(u)$  car la famille trouvée est par définition génératrice et elle est libre car contient un seul élément non nul.

2. Soit  $u : \mathbf{K}_2[X] \rightarrow \mathbf{K}$  définie par : pour tout  $P \in \mathbf{K}_2[X]$ ,  $u(P) = P(1)$ . On admet que  $u$  est linéaire et on se propose de déterminer son noyau.

Soit  $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{K}_2[X]$ . On a :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(u) &\iff u(P) = 0 \\ &\iff P(1) = a + b + c = 0 \\ &\iff a = -b - c \\ &\iff P = aX^2 + bX + c = (-b - c)X^2 + bX + c = b(-X^2 + X) + c(-X^2 + 1). \end{aligned}$$

On en déduit que  $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(-X^2 + X, -X^2 + 1)$ .

On notera que l'on a donné une base de  $\text{Ker}(u)$  car la famille trouvée est par définition génératrice et elle est libre car contient deux vecteurs non colinéaires.

**Définition 9.** Image d'une application linéaire.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels et soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. On définit son **image** noté  $\text{Im}(u)$  par :

$$\text{Im}(u) = \{y \in F, \exists x \in E, y = u(x)\} = \{u(x), x \in E\}.$$

On rappelle la proposition suivante vue en TSI 1.

**Proposition 8.** L'image d'une application linéaire  $u : E \rightarrow F$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

*Démonstration.* Voir cours de TSI 1. □

Déterminer une image n'est pas forcément simple. On rappelle les deux propositions suivantes vues en TSI 1.

**Proposition 9.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. On a :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

*Démonstration.* Voir cours de TSI 1. □

**Théorème 1.** Théorème du rang.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. On suppose que  $u$  est de dimension finie. Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors,  $\text{Im}(u)$  est de dimension finie et

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)).$$

*Démonstration.* Admis. □

*Exemple 10.* On reprend les applications linéaires de l'exemple 9.

1. On a  $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$ . Le théorème du rang assure que  $\dim(\text{Im}(u)) = 3 - 1 = 2$ . Or,

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(1, 0, 0), u(0, 1, 0), u(0, 0, 1)) = \text{Vect}((1, 0), (-1, 1), (0, -1)).$$

Comme  $(-1, 1) = -1 \times (1, 0) + (-1) \times (0, -1)$ , on en déduit que

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}((1, 0), (0, -1)) = \text{Vect}((1, 0), (0, 1)) = \mathbf{K}^2.$$

2. On a  $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$ . Le théorème du rang assure que  $\dim(\text{Im}(u)) = 3 - 2 = 1$ . Or,

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(1), u(X), u(X^2)) = \text{Vect}(1, 1, 1) = \text{Vect}(1) = \mathbf{K}.$$

**Corollaire 1.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et de même dimension. Soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est bijective ;
- (ii)  $f$  est injective ;
- (iii)  $f$  est surjective.

*Démonstration.* La preuve se base sur le théorème du rang. □

## 1.6 Matrice d'une application linéaire

**Définition 10.** Matrice d'une application linéaire.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies. On se donne  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ . On appelle la **matrice** de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , notée  $\text{mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}(u)$  la matrice des coordonnées des vecteurs  $u(e_1), \dots, u(e_p)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

*Exemple 11.* 1. Soit  $u : \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^3$  définie par  $u(x, y, z) = (2x + y, -x + y - z, y - z)$ . On admet que  $u$  est linéaire.

La matrice de  $u$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{K}^3$  est :  $\text{mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  car  $u(1, 0, 0) = (2, -1, 0) = 2 \times (1, 0, 0) + (-1) \times (0, 1, 0) + 0 \times (0, 0, 1)$ ,  $u(0, 1, 0) = (1, 1, 1) = 1 \times (1, 0, 0) + 1 \times (0, 1, 0) + 1 \times (0, 0, 1)$  et  $u(0, 0, 1) = (0, -1, -1) = 0 \times (1, 0, 0) + (-1) \times (0, 1, 0) + (-1) \times (0, 0, 1)$ .

2. Soit  $u : \mathbf{K}_2[X] \rightarrow \mathbf{K}^2$  définie par :  $u(P) = (P(1), P(2))$ . On admet que  $u$  est linéaire.

On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  et  $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$  les bases canoniques respectives de  $\mathbf{K}_2[X]$  et  $\mathbf{K}^2$ . Comme  $u(1) = (1, 1) = 1 \times (1, 0) + 1 \times (0, 1)$ ,  $u(X) = (1, 2) = 1 \times (1, 0) + 2 \times (0, 1)$  et  $u(X^2) = (1, 4) = 1 \times (1, 0) + 4 \times (0, 1)$ , on a  $\text{mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

La proposition, vue en TSI 1, permet de comprendre l'utilité de la notion de matrice d'une application linéaire.

**Proposition 10.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On munit  $E$  et  $F$  de deux bases notées  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

Soit  $x \in E$  et soit  $X$  la matrice des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On pose  $y = u(x)$  et on note  $Y$  la matrice de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{C}$ . Soit  $A = \text{mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}(u)$ . Alors, on a :  $Y = AX$ .

*Démonstration.* Voir cours de TSI 1. □

*Exemple 12.* On admet que la famille  $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$  est une base de  $\mathbf{K}^3$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^3)$

dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Calculer  $u(2, 2, 2)$ .

On remarque que  $(2, 2, 2) = 1 \times (1, 1, 0) + 1 \times (1, 0, 1) + 1 \times (0, 1, 1)$ , ainsi la matrice des coordonnées de  $(2, 2, 2)$  est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Il s'ensuit que la matrice des coordonnées de  $u(x)$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

On en déduit que :

$$u(x) = 1 \times (1, 1, 0) + 6 \times (1, 0, 1) + 4 \times (0, 1, 1) = (7, 5, 10).$$

La proposition suivante fait le lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.

**Proposition 11.** Lien entre la multiplication de matrices et la composition d'applications linéaires

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie. On note  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des bases respectives de  $E, F$  et  $G$ . Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . On a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}}(g) \times \text{mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}(f).$$

Démonstration. La preuve découle immédiatement de la proposition 10. □

**Corollaire 2.** *Matrice d'un automorphisme.*

On suppose que  $E$  est de dimension finie. Soit  $f \in GL(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est inversible et  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$ .

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 11 avec  $E = F = G$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ ,  $g = f^{-1}$  et remarquer que la matrice de  $\text{id}_E$  est la matrice identité. □

Exemple 13. On se propose de montrer que  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible et calculer son inverse.

Soit  $u : \mathbf{K}_3[X] \rightarrow \mathbf{K}_3[X]$  définie par  $u(P) = P(X+1)$ . Il est clair que  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}_3[X])$ .

On remarque que  $M$  est la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbf{K}_3[X]$  car :

$$u(1) = 1, u(X) = X + 1, u(X^2) = (X + 1)^2 = X^2 + 2X + 1 \text{ et } u(X^3) = (X + 1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1.$$

De plus, si l'on introduit  $v : \mathbf{K}_3[X] \rightarrow \mathbf{K}_3[X]$  par  $v(P) = P(X-1)$ , alors pour tout  $P \in \mathbf{K}_3[X]$ , on a :

$$(u \circ v)(P) = u(v(P)) = u(P(X-1)) = P(X-1+1) = P.$$

On en déduit que  $u$  est un automorphisme de  $\mathbf{K}_3[X]$  et  $u^{-1} = v$ . Or, comme

$$v(1) = 1, v(X) = X - 1, v(X^2) = (X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1 \text{ et } v(X^3) = (X - 1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1,$$

la matrice de  $v$  dans la base canonique de  $\mathbf{K}_3[X]$  est  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**1.7 Rappels sur les formules de changement de bases**

Dans cette sous-partie,  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbf{N}^*$ . On se donne deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ . Si  $x \in E$ , on note  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  la matrice des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$  la matrice des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Définition 11.** *Matrice de passage.*

La **matrice de passage** de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice, notée  $\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ , est la matrice des coordonnées vecteurs de la base  $\mathcal{B}'$  exprimées dans la base  $\mathcal{B}$ .

Remarque 3. Autrement si, c'est la matrice de l'application linéaire  $\text{id}_E : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$ , soit  $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E)$ .

Exemple 14. On munit  $\mathbf{K}_2[X]$  des bases  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  et  $\mathcal{B}' = (2, 1 + 2X, 1 - X + X^2)$ . Alors

$$\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 12.** *Inversibilité des matrices de passage.*

$\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$  est inversible et  $\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1} = \text{Pass}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})$ .

Démonstration. D'après la remarque 3, on a

$$\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E) \quad \text{et} \quad \text{Pass}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E).$$

Ainsi

$$\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') \text{Pass}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}) = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E) \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{id}_E \circ \text{id}_E) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = I_n.$$

□

**Proposition 13.** *Formule de changement de bases pour les vecteurs.*

Soit  $x \in E$  dont on note  $X$  la matrice des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  et  $X'$  la matrice des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$ . On a

$$X = \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') X'.$$

*Démonstration.* Soit  $\text{id}_E : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$ . On a  $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E) = \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')$ .

Par le théorème de représentation matricielle des applications linéaires, on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') \text{mat}_{\mathcal{B}'}(x).$$

□

*Exemple 15.* Soit  $E = \mathbf{K}_2[X]$  muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ .

1. Justifier que la famille  $\mathcal{B}' = (1, X - 1, (X - 1)^2)$  est une base de  $E$ .
2. Donner les coordonnées de  $Q = 2X^2 - 3X - 1$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

*Solution.* 1. La famille  $\mathcal{B}'$  est une famille d'éléments de  $E$ , est échelonnée en degrés, donc est libre. Elle est de cardinal 3 dans  $E$  de dimension 3, on en déduit que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$ .

2. On note  $X$  (resp.  $X'$ ) la matrice des coordonnées de  $Q$  dans la base  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ). D'après la proposition 13, on a

$$X' = \text{Pass}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}) X.$$

Il est clair que  $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . De plus, comme

$$X^2 = (X - 1)^2 + 2(X - 1) + 1, \quad X = (X - 1) + 1,$$

on a  $\text{Pass}(\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

La matrice des coordonnées de  $Q$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est alors  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 14.** *Formule de changement de bases pour les applications linéaires.*

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$  et  $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ . On a :

$$A = \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') A' \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1}.$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer la composition suivante

$$(E, \mathcal{B}) \xrightarrow{u} (E, \mathcal{B}) = \left( (E, \mathcal{B}') \xrightarrow{\text{id}_E} (E, \mathcal{B}) \right) \circ \left( (E, \mathcal{B}') \xrightarrow{u} (E, \mathcal{B}') \right) \circ \left( (E, \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{id}_E} (E, \mathcal{B}') \right).$$

Le théorème de représentation matricielle des applications linéaires donne alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E) \times \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) \times \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E),$$

soit, en utilisant la proposition 12  $\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') A' \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1}$ .

□

*Remarque 4.* Pour retenir le résultat de la proposition 14, il suffit de se souvenir que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{B}) & \xrightarrow{u} & (E, \mathcal{B}) \\ \downarrow \text{id}_E & & \downarrow \text{id}_E \\ (E, \mathcal{B}') & \xrightarrow{u} & (E, \mathcal{B}') \end{array}$$

*Exemple 16.* Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^2)$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  de  $\mathbf{K}^2$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $\mathcal{B}' = (e_1 - e_2, e_1 + e_2)$ .

1. Justifier que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbf{K}^2$ .
2. Donner la matrice de  $u$  dans cette base.
3. Écrire la relation de passage.

*Solution.* 1. Par des arguments de cardinalité et de dimension, il suffit de montrer que  $\mathcal{B}'$  est libre. Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$  tel que  $\alpha(e_1 - e_2) + \beta(e_1 + e_2) = 0$ .

On a donc  $(\alpha + \beta)e_1 + (-\alpha + \beta)e_2 = 0$ . Comme la famille  $(e_1, e_2)$  est libre, on a  $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$ , soit  $\alpha = \beta = 0$ .

2. L'énoncé donne

$$u(e_1) = u(e_2) = e_1 + e_2,$$

ainsi

$$u(e_1 - e_2) = 0 \quad \text{et} \quad u(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2).$$

Ainsi,  $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

3. On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . D'après la proposition 14, on a

$$A = \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') A' \text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1}.$$

Or,  $\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\text{Pass}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2 Sous-espaces vectoriels

### 2.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Dans cette sous-partie,  $p$  est un entier naturel non nul et  $F_1, \dots, F_p$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

**Définition 12.** *Somme de sous-espaces vectoriels.*

La **somme** des sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_p$  de  $E$ , noté  $F_1 + \dots + F_p$  est le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par

$$F_1 + \dots + F_p = \left\{ x \in E, \exists (f_1, \dots, f_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x = \sum_{i=1}^p f_i \right\}.$$

*Remarque 5.* On peut aussi définir  $F_1 + \dots + F_p$  par

$$F_1 + \dots + F_p = \{ f_1 + \dots + f_p, (f_1, \dots, f_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \}.$$

**Définition 13.** *Somme directe de sous-espaces vectoriels.*

On dit que la somme des sous-espaces vectoriels  $F = F_1 + \dots + F_p$  est **directe** si tout élément de  $E$  se décompose de manière unique selon  $(F_1, \dots, F_p)$ , i.e.

$$\forall x \in F, \exists! (f_1, \dots, f_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x = \sum_{i=1}^p f_i.$$

La proposition suivante est plus simple à manipuler que la définition.

**Proposition 15.** *Caractérisation des sommes directes.*

La somme  $F_1 + \dots + F_p$  est directe si, et seulement si, on a

$$\forall (f_1, \dots, f_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad \left( \sum_{i=1}^p f_i = 0 \right) \implies (f_1 = \dots = f_p = 0).$$

*Démonstration.* La preuve est en deux temps.

$\implies$  Soit  $(f_1, \dots, f_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$  tel que  $\sum_{i=1}^p f_i = 0$ . Comme

$$\sum_{i=1}^p f_i = \sum_{i=1}^p 0 = 0$$

et pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $0 \in F_i$ . Par unicité de la décomposition, on en déduit que pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f_i = 0$ .

$\impliedby$  Soit  $x \in F_1 + \dots + F_p$ . Par définition, il existe  $(f_1, \dots, f_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$  tel que  $x = \sum_{i=1}^p f_i$ . Pour conclure, il reste à prouver l'unicité. Supposons qu'il existe un autre  $p$ -uplet  $(g_1, \dots, g_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$  tel que

$$x = \sum_{i=1}^p f_i = \sum_{i=1}^p g_i.$$

En particulier,  $\sum_{i=1}^p (g_i - f_i) = 0$ . Par hypothèse, on a : pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f_i = g_i$ , ce qui conclut l'unicité.

□

*Exemple 17.* On se place dans  $E = \mathbf{K}_3[X]$ , on note

$$F = \{P \in E, P(X) = P(-X)\}, G = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \text{ et}$$

$$H = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}.$$

Montrer que  $E = F \oplus G \oplus H$ .

*Solution.* (i) On commence par donner des bases de  $F$ ,  $G$  et  $H$ .

(a) *Base de  $F$ .* Soit  $P \in E$ . Il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$  tel que  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ . On a

$$\begin{aligned} P \in F &\iff -aX^3 + bX^2 - cX + d = aX^3 + bX^2 + cX + d \\ &\iff a = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $F = \text{Vect}(1, X^2)$ .

(b) *Base de  $G$ .*

Soit  $P \in E$ .  $P$  appartient à  $G$  si, et seulement si, 0, 1 et 2 sont des racines de  $P$ . Il existe donc  $Q \in \mathbf{K}[X]$  tel que  $P = X(X-1)(X-2)Q$ . Comme  $\deg(P) \leq 3$ , on a  $\deg(Q) \leq 0$ , donc  $Q$  est un polynôme constant.

Ainsi,  $G = \text{Vect}(X(X-1)(X-2))$ .

(c) *Base de  $H$ .*

On procède de la même façon qu'au point (b) pour montrer que  $H = \text{Vect}((X-1)(X-2)(X-3))$ .

(ii) Pour montrer que  $E = F \oplus G \oplus H$ , on procède par analyse/synthèse.

**Analyse.** Soit  $P \in E$ . On suppose qu'il existe  $(P_1, P_2, P_3) \in F \times G \times H$  tel que

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

D'après les descriptions de  $F$ ,  $G$  et  $H$  données ci-dessus, il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$  tel que

$$P = a + bX^2 + cX(X-1)(X-2) + d(X-1)(X-2)(X-3). \quad (3)$$

En évaluant (3) en 1 et en 2, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b &= P(1) \\ a + 4b &= P(2) \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{4}{3}P(1) - \frac{1}{3}P(2) \\ b &= \frac{1}{3}P(2) - \frac{1}{3}P(1) \end{cases}.$$

En évaluant (3) en 3 et en remplaçant les valeurs de  $a$  et  $b$  par celles obtenus ci-dessus, on a

$$c = \frac{1}{6} \left( P(3) - \left( \frac{4}{3}P(1) - \frac{1}{3}P(2) \right) - 9 \times \left( \frac{1}{3}P(2) - \frac{1}{3}P(1) \right) \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{5}{3}P(1) - \frac{8}{3}P(2) + P(3) \right).$$

Finalement, en évaluant (3) en 0, on a

$$d = \frac{1}{6} \left( -P(0) + \frac{4}{3}P(1) - \frac{1}{3}P(2) \right).$$

**Synthèse.** La synthèse est claire. Les polynômes  $P_1, P_2, P_3$  ainsi définis appartiennent respectivement à  $F$ ,  $G$  et  $H$  et vérifient  $P_1 + P_2 + P_3 = P$ .

**Proposition 16.** Base adaptée à une somme directe.

On suppose que  $E$  est de dimension finie et que l'on a  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $\mathcal{B}_i$  une base de  $F_i$ .

La famille  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est une base de  $E$  adaptée à la somme directe. Cette base est parfois appelée la base **concaténée** des bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ .

*Démonstration.* On va montrer que  $\mathcal{B}$  est libre et génératrice. Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on écrit  $\mathcal{B}_i = (e_1^i, \dots, e_{r_i}^i)$ .

**Libre.** Soit  $(\lambda_1^1, \dots, \lambda_{r_1}^1, \dots, \lambda_1^p, \dots, \lambda_{r_p}^p)$  tel que

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_j^i e_j^i = 0.$$

D'après la proposition 15, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_j^i e_j^i = 0.$$

Or, la famille  $(e_1^i, \dots, e_{r_i}^i)$  est une base de  $\mathcal{B}_i$ , donc pour tout  $j \in \llbracket 1, r_i \rrbracket$ ,  $\lambda_j^i = 0$ .  $\mathcal{B}$  est donc libre.

**Génératrice.** Soit  $x \in E$ . Par définition, il existe  $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$  tel que  $x = \sum_{i=1}^p x_i$ .

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $(e_1^i, \dots, e_{r_i}^i)$  est une base de  $\mathcal{B}_i$ , donc il existe  $(\alpha_1^i, \dots, \alpha_{r_i}^i) \in \mathbf{K}^{r_i}$  tel que  $x_i = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i e_j^i$ , ce qui donne finalement

$$x = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i e_j^i.$$

□

## 2.2 Hyperplans d'un espace vectoriel

Dans cette sous-partie,  $E$  est un espace vectoriel de **dimension finie**  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**Définition 14.** *Hyperplan de  $E$ .*

On appelle **hyperplan** de  $E$  tout sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$ .

*Exemple 18.* On retiendra que :

1. les droites vectorielles sont les hyperplans de  $\mathbf{R}^2$  ;
2. les plans vectoriels sont les hyperplans de  $\mathbf{R}^3$ .

La proposition suivante est fondamentale.

**Proposition 17.** *Caractérisation des hyperplans.*

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $F$  est un hyperplan de  $E$  ;
- (ii)  $F$  admet une droite vectorielle pour supplémentaire ;
- (iii)  $F$  est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$ .

*Remarque 6.* On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire de  $E$  vers  $\mathbf{K}$ .

*Démonstration.* On prouve (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii)  $\implies$  (i).

**(i)  $\implies$  (ii)** Soit  $x \notin F$  et soit  $D = \text{Vect}(x)$ . Montrons que l'on a  $F \oplus D = E$ .

Déjà, il est clair que  $\dim(F) + \dim(D) = \dim(E)$ .

Soit  $(f, d) \in F \times D$  tel que  $f + d = 0$ . Comme  $d \in D$ , il existe  $\lambda \in \mathbf{K}$  tel que  $f + \lambda x = 0$ . Si  $\lambda \neq 0$ , on aurait  $x = -\frac{1}{\lambda}f \in F$ , ce qui est exclu. Ainsi  $\lambda = 0$  et  $f = 0$ .

On en déduit que  $F \oplus D = E$ .

**(ii)  $\implies$  (iii)** Soit  $D$  une droite vectorielle supplémentaire à  $F$ . Soit  $e_n \in D$  non nul de sorte que  $D = \text{Vect}(e_n)$ . Soit  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $F$  de sorte que  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$  soit une base de  $E$ .

On définit l'application linéaire  $\varphi$  par :

$$\forall x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \quad \varphi(x) = \lambda_n.$$

Il est facile de constater que  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle (par exemple  $\varphi(e_n) = 0$ ).

Soit  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(\varphi)$ . On a  $\varphi(x) = \lambda_n = 0$ . Ainsi,  $x \in F$ .

Réciproquement, il est clair que si  $x \in F$ , alors  $x \in \text{Ker}(\varphi)$ .

On a montré que  $F = \text{Ker}(\varphi)$ .

**(iii)  $\implies$  (i)** Comme  $\varphi \neq 0$ , on a  $\text{Im}(\varphi) = 1$ . par le théorème du rang, on en déduit que  $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(F) = n - 1$ . □

*Exemple 19.* Les hyperplans de  $\mathbf{K}^n$  ont une équation de la forme  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$  où  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$  et est non nul.

*Exemple 20.* Soit  $F = \{P \in \mathbf{K}_2[X], P(1) + P'(0) = 0\}$ .

Montrer que  $F$  est un hyperplan de  $\mathbf{K}_2[X]$ .

*Solution.* Soit  $P \in \mathbf{K}_2[X]$  : il existe  $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$  tel que  $P = aX^2 + bX + c$ . Ainsi

$$\begin{aligned} P \in F &\iff a + b + c + b = 0 \\ &\iff a + 2b + c = 0 \\ &\iff a = -2b - c \\ &\iff P = (-2b - c)X^2 + bX + c \\ &\iff P = b(-2X^2 + X) + c(-X^2 + 1) \end{aligned}$$

On en déduit que  $F = \text{Vect}(-2X^2 + X, -X^2 + 1)$ , donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}_2[X]$ .

Les vecteurs  $-2X^2 + X$  et  $-X^2 + 1$  ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille  $(-2X^2 + X, -X^2 + 1)$  est une base de  $F$ .

Comme  $\dim(F) = 2$  et  $\dim(\mathbf{K}_2[X]) = 3$ ,  $F$  est un hyperplan de  $\mathbf{K}_2[X]$ .

## 2.3 Sous-espaces stables

**Définition 15.** *Sous-espace vectoriel stable.*

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est **stable** par  $u \in \mathcal{L}(E)$  si,  $u(F) \subset F$ , i.e.

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

*Exemple 21.* Quelques exemples importants à retenir.

1. Les sous-espaces  $\{0\}$  et  $E$  sont stables pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
2. Une homothétie (i.e. une application linéaire de la forme  $\lambda \text{id}_E$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ ) laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  (et ce sont les seules).
3. Une rotation vectorielle du plan vectoriel d'angle  $\pi/6$  laisse stable  $\{0\}$ , l'axe de la rotation et  $\mathbf{R}^2$ .
4. Soit  $u : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'endomorphisme défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad u(x, y, z) = (7x + 4y + 4z, 4x - 8y + z, -4x - y + 8z).$$

Les sous-espaces vectoriels

$$D = \text{Vect}((1, -4, 0)) \quad \text{et} \quad H = \text{Vect}((0, 0, 1), (4, 1, 0))$$

sont stables par  $u$ . En effet, on a :

$$u(D) = \text{Vect}(u(1, -4, 0)) = \text{Vect}((-9, 36, 0)) \subset D$$

et

$$u(H) = \text{Vect}(u(0, 0, 1), u(4, 1, 0)) = \text{Vect}((4, 1, 8), (32, 8, -17)) \subset H.$$

*Remarque 7.* Si  $F$  est stable par  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u|_F$  est un endomorphisme de  $F$ .

**Proposition 18.** *On suppose que  $E$  est de dimension finie et soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ .*

*Si  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  ( $\mathcal{B}_i$  est une base de  $F_i$ ) est une base adaptée à la somme directe et si les espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont laissés stables par  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors on a*

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix} \quad \text{où } A_i = \text{mat}_{\mathcal{B}_i}(u|_{F_i}).$$

*Démonstration.* Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $\mathcal{B}_i = (e_1^i, \dots, e_{r_i}^i)$ . On remarque que pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et pour tout  $j \in \llbracket 1, r_i \rrbracket$ , on a

$$u(e_j^i) = u|_{E_i}(e_j^i) = \underset{\in F_1}{0} + \dots + \underset{\in F_{i-1}}{0} + \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i e_j^i + \underset{\in F_{i+1}}{0} + \dots + \underset{\in F_p}{0}$$

où  $(\alpha_1^i, \dots, \alpha_{r_i}^i) \in \mathbf{K}^{r_i}$  est tel que  $u|_{E_i}(e_j^i) = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j^i e_j^i$ .

□

*Exemple 22.* On reprend l'exemple précédent. On considère la base

$$\mathcal{B} = ((-9, 36, 0), (4, 1, 8), (32, 8, -17))$$

qui est adaptée à la somme directe  $\mathbf{R}^3 = D \oplus H$ . La matrice de  $u$  dans cette base est alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -17 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

*Exemple 23.* Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^3)$  telle que la matrice de  $u$  dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbf{K}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Donner une base de  $\text{Im}(u)$  et une de  $\text{Ker}(u)$ .
2. Montrer que  $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbf{K}^3$ . En déduire une base  $\mathcal{B}'$  adaptée à cette somme directe.
3. Donner la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

*Solution.* 1. On commence par remarquer que la matrice  $A$  est de rang 1 (toutes les colonnes sont proportionnelles à la première), donc  $\text{Im}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ , ainsi  $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ . Comme  $e_1 + e_2 + e_3 \neq 0$ , la famille  $(e_1 + e_2 + e_3)$  forme une base de  $\text{Ker}(u)$ .

On remarque facilement que  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  appartiennent au noyau de  $A$  (qui est de dimension 2

par le théorème du rang) et non colinéaires, ainsi  $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ , soit  $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$ . Ainsi,  $(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$  est une base de  $\text{Ker}(u)$ .

2. Soit  $y \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$ , il existe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{K}^3$  tel que

$$y = \alpha(e_1 - e_2) + \beta(e_1 - e_3) = (\alpha + \beta)e_1 - \alpha e_2 - \beta e_3 = \gamma(e_1 + e_2 + e_3) = \gamma e_1 + \gamma e_2 + \gamma e_3.$$

Comme la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est libre, on en déduit le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \gamma \\ -\alpha = \gamma \\ -\beta = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Comme  $\dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = 3$  (théorème du rang), on en déduit que  $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbf{K}^3$ . La base  $\mathcal{B}'$  constituée de la concaténation d'une base de  $\text{Ker}(u)$  et d'une de  $\text{Im}(u)$  est alors une base de  $\mathbf{K}^3$ . D'après la question 1, il suffit de prendre  $\mathcal{B}' = (e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ .

3. Un calcul facile donne

$$u(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 + 2(e_1 + e_2 + e_3) + 3(e_1 + e_2 + e_3) = 6(e_1 + e_2 + e_3).$$

On en déduit que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 19.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $u$ .

*Démonstration.* (i) Soit  $x \in \text{Ker}(u)$ . Comme  $f(x) = 0 \in \text{Ker}(x)$ ,  $\text{Ker}(u)$  est stable par  $u$ .

(ii) Soit  $y \in \text{Im}(u)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$ . Ainsi,  $u(y) = u(u(x)) \in \text{Im}(u)$ .  $\text{Im}(u)$  est stable par  $u$ .

□

### 3 Matrices

#### 3.1 Trace d'une matrice carrée

**Définition 16.** Trace d'une matrice carrée.

Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On définit la **trace** de  $A$ , notée  $\text{Tr}(A)$  par

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}.$$

*Exemple 24.*  $\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = 5$  et  $\text{Tr}(I_n) = n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

**Proposition 20.** Quelques propriétés.

La trace vérifie les propriétés suivantes.

- (i) L'application  $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$  est une forme linéaire.
- (ii) Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ , on a  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

*Démonstration.* (i) Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A + \lambda B) &= \text{Tr}((a_{i,j} + \lambda b_{i,j})) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{k,k} + \lambda b_{k,k}) \quad \text{par définition de Tr} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,k} + \lambda \sum_{k=1}^n b_{k,k} \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B). \end{aligned}$$

(ii) Par définition du produit matriciel, on a  $AB = \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \\ &= \text{Tr}(BA). \end{aligned}$$

□

**Définition 17.** Matrice semblable.

Deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  sont **semblables** s'il existe  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ .

**Corollaire 3.** Deux matrices semblables ont la même trace.

*Démonstration.* Si  $A$  et  $B$  sont semblables, il existe  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ . D'après la proposition 20, on peut écrire

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PBP^{-1}) = \text{Tr}(BP^{-1}P) = \text{Tr}(B).$$

□

⚠ La réciproque est fautive. Pourquoi ?

*Remarque 8.* Deux matrices sont semblables lorsqu'elles sont deux matrices dans d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

### 3.2 Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans cette sous-partie,  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**Définition 18.** *Trace d'un endomorphisme.*

D'après le corollaire 3, la trace d'une matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie dans laquelle on l'écrit.

On note  $\text{Tr}(u)$  cette quantité commune.

*Exemple 25.* Soit  $u : \mathbf{K}_2[X] \rightarrow \mathbf{K}_2[X]$  l'endomorphisme défini par

$$\forall P \in \mathbf{K}_2[X], \quad u(P) = XP'.$$

Dans la base  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Ainsi,  $\text{Tr}(u) = 3$ .

### 3.3 Transposée d'une matrice

**Définition 19.** *Transposée d'une matrice.*

Soit  $n, m$  deux entiers naturels non nuls. Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ . On définit la matrice la **transposée** de  $A$ , notée  $A^\top$ , par

$$A^\top = (a_{j,i})_{(j,i) \in \llbracket 1,m \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}).$$

*Exemple 26.* La transposée de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ . La transposée de la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$  est  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

*Remarque 9.* L'opération de transposition « échange les lignes et les colonnes ».

**Proposition 21.** *Propriétés de la transposition.*

On a les propriétés suivantes.

(i) La transposition est une opération involutive, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}), \quad (A^\top)^\top = A.$$

(ii) La transposition est linéaire, i.e.

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}), \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad (A + \lambda B)^\top = A^\top + \lambda B^\top.$$

(iii) La trace est invariante par transposition, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad \text{Tr}(A^\top) = \text{Tr}(A).$$

(iv) Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ , pour tout  $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{K})$ , on a  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ .

(v) La transposition commute avec l'inverse, i.e. pour tout  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ ,  $A^\top$  est inversible et  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ .

*Démonstration.* (i) C'est clair par définition de la transposition.

(ii) Soit  $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbf{K}$ . On a

$$\begin{aligned} (A + \lambda B)^\top &= (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket}^\top \\ &= (a_{j,i} + \lambda b_{j,i})_{(j,i) \in \llbracket 1,m \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket} \quad \text{par définition de la transposition} \\ &= (a_{j,i})_{(j,i) \in \llbracket 1,m \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket} + \lambda (b_{j,i})_{(j,i) \in \llbracket 1,m \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket} \quad \text{par définition de l'addition matricielle} \\ &= A^\top + \lambda B^\top. \end{aligned}$$

(iii) Déjà, on remarque que si  $A$  est carrée, alors  $A^\top$  l'est aussi et est de même taille. De plus, d'une part

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i},$$

d'autre part

$$\text{Tr}(A^\top) = \sum_{j=1}^n a_{j,j},$$

d'où  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^\top)$ .

(iv) On remarque que  $AB \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ , donc  $(AB)^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ . Soit  $(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket$ . Par définition de la transposition et du produit matriciel, d'une part, on a

$$\left( (AB)^\top \right)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^m a_{j,k} b_{k,i}.$$

D'autre part, on a

$$\left( B^\top A^\top \right)_{i,j} = \sum_{k=1}^m b_{k,i} a_{j,k}.$$

On en déduit donc que  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ .

(v) On commence par remarquer que  $I_n^\top = I_n$ . De plus, d'après le point (iv), on a

$$A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I_n^\top = I_n.$$

Par unicité de l'inverse, on en déduit que  $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ .

□

**Définition 20.** Matrices symétriques et antisymétriques.

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . On dit que :

- (i)  $M$  est **symétrique** si  $M = M^\top$ .
- (ii)  $M$  est **antisymétrique** si  $M^\top = -M$ .

*Exemple 27.* La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  est symétrique et la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  est antisymétrique.

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$  (resp.  $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ ) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre  $n$ . Il est facile de remarquer que  $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

**Proposition 22.** Une somme directe remarquable.

On a  $\mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

*Démonstration.* On procède par analyse/synthèse.

**Analyse.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . On suppose qu'il existe  $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$  tel que  $M = S + A$ . En transposant cette relation et en utilisant la proposition 21, on obtient  $M^\top = (S + A)^\top = S^\top + A^\top = S - A$ . On en déduit que

$$S = \frac{1}{2} (M + M^\top) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2} (M - M^\top).$$

**Synthèse.** La synthèse est facile à faire (mais indispensable). Il est clair que les matrices  $S$  et  $A$  définies lors de l'analyse vérifient  $S + A = M$  et sont respectivement symétrique et antisymétrique.

□

## 4 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent être utiles pour les concours.

### 4.1 Polynômes d'interpolation de Lagrange

**Définition 21.** *Polynômes d'interpolation de Lagrange.*

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Soit  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$  ( $n+1$ ) réels deux à deux distincts. On définit les **polynômes d'interpolation de Lagrange**, notés  $L_0, \dots, L_n$ , en les points  $x_0, \dots, x_n$  par :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i}.$$

Il est facile de vérifier que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En effet,

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i} = 1$$

et, si  $i \neq j$ , il existe  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ , donc  $L_i(x_j) = 0$ .

Cette remarque nous permet d'établir la proposition suivante.

**Proposition 23.** *Avec les notations précédentes, si  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ , le polynôme  $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$  est l'unique polynôme de  $\mathbf{K}_n[X]$  vérifiant*

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(x_j) = \lambda_j.$$

*Démonstration.* On prouve séparément la « convenance » de l'unicité.

**Convenance.** Déjà  $P \in \mathbf{K}_n[X]$  car pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L_i$  est degré  $n$ .

Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a

$$P(x_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_j) = \lambda_j \times 1 = \lambda_j$$

car pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ ,  $L_i(x_j) = 0$ .

**Unicité.** Supposons qu'il existe  $Q \in \mathbf{K}_n[X]$  tel que

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad Q(x_j) = \lambda_j.$$

Il est clair que  $P - Q \in \mathbf{K}_n[X]$  et

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (P - Q)(x_j) = 0.$$

Ainsi,  $P - Q$  a au moins  $n+1$  racines et est de degré au plus  $n$ , c'est donc le polynôme nul, ainsi  $P = Q$ .  $\square$

**Proposition 24.** *Toujours la même notation que ci-dessus, la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  et une base de  $\mathbf{K}_n[X]$  et*

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X], \quad P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i.$$

*Démonstration.* Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$  tel que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0.$$

En évaluant cette relation en  $x_j$  ( $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ), on a  $\lambda_j = 0$ .

La famille est donc libre.

La famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est libre, contient  $n + 1$  éléments dans  $\mathbf{K}_n[X]$  de dimension  $n + 1$ , c'est donc une base de  $\mathbf{K}_n[X]$ .

Soit  $P \in \mathbf{K}_n[X]$ . Comme  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbf{K}_n[X]$ , il existe  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$  tel que

$$P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i.$$

En évaluant cette relation en  $x_j$  ( $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ), on a  $P(x_j) = \lambda_j$ . □

## 4.2 Endomorphismes nilpotents

**Définition 22.** *Endomorphisme nilpotent.*

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est **nilpotent** s'il existe  $p \in \mathbf{N}^*$  tel que  $u^p = 0$ .

*Remarque 10.* On définit de manière analogue la notion de matrice nilpotente.

*Exemple 28.* Par exemple, l'endomorphisme nul est nilpotent. Moins trivial, l'endomorphisme

$$d : \begin{cases} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$$

est nilpotent.

La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est nilpotente.

**Proposition 25.** *Indice de nilpotence.*

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  non nul. Il existe un plus entier  $p \in \mathbf{N}^*$  tel que  $u^p = 0$ , i.e.  $u^p = 0$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $u^k \neq 0$ .

$p$  s'appelle l'**indice de nilpotence** de  $u$ .

*Démonstration.* Soit  $A = \{m \in \mathbf{N}^*, u^m = 0\}$ .  $A \subset \mathbf{N}^*$  et est non vide, donc  $A$  admet un plus petit élément  $p$  qui vérifie donc  $u^p = 0$  et, par définition, pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $u^k \neq 0$ . □

**Proposition 26.** *Un endomorphisme nilpotent n'est pas bijectif.*

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $u$  est nul, alors  $u$  n'est pas bijectif.

On suppose que  $u$  non nul. Soit  $p \in \mathbf{N}^*$  l'indice de nilpotence de  $u$ . Supposons  $u$  bijectif. On a alors  $0 = u^{-1} \circ u^p = u^{p-1}$ , ce qui contredit la définition de l'indice de nilpotence. □

**Proposition 27.** *Une famille libre remarquable!*

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent et non nul, d'indice de nilpotence  $p \in \mathbf{N}^*$ .

Soit  $x \in E$  tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0$ . La famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est une famille libre de  $E$ .

*Démonstration.* On commence par remarquer cette pour tout  $m \geq p$ ,  $u^m(x) = u^{m-p+1}(u^{p-1}(x)) = u(0) = 0$ .

Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$  tel que  $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x) = 0$ .

Supposons qu'il existe  $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  tel que  $\lambda_j \neq 0$ . Soit  $j_0 = \min \{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \lambda_k \neq 0\}$ , ainsi

$$0 = \lambda_{j_0} u^{j_0}(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x).$$

En composant cette relation par  $u^{p-1-j_0}$ , on a

$$0 = \lambda_{j_0} u^{p-1}(x).$$

Cette relation est impossible car  $\lambda_{j_0} \neq 0$  et  $u^{p-1}(x) \neq 0$ . On en déduit que la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre. □

**Corollaire 4.** *Indice de nilpotence en dimension finie.*

*On suppose que  $E$  est de dimension finie.*

*Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  non nul et nilpotent. Alors, l'indice de nilpotence de  $u$  est inférieur ou égal à  $\dim(E)$ .*

*Démonstration.* Soit  $p \in \mathbf{N}^*$  l'indice de nilpotence de  $u$ . Soit  $x \in E$  tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0$ . D'après la proposition 27, la famille  $(x, \dots, u^{p-1}(x))$  est libre.

Il s'ensuit que son cardinal est inférieur ou égal à la dimension de  $E$ , i.e.  $p \leq n$ . □

### 4.3 Introduction à la dualité

**Définition 23.** *Dual d'un espace vectoriel.*

*On appelle le **dual** du  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ , noté  $E^*$ , l'ensemble  $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ .*

*Remarque 11.* Lorsque  $E$  est de dimension finie,  $E^*$  est aussi de dimension finie et on a  $\dim(E^*) = \dim(E)$ .

**Proposition 28.** *Base duale.*

*On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbf{N}^*$ .*

*Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit la famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  de  $E^*$  où pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_i^*$  est l'endomorphisme de  $E$  défini par :*

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

*La famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$  appelée **base duale** de  $(e_1, \dots, e_n)$ .*

*Remarque 12.* Notons que l'endomorphisme  $e_i^*$  est bien défini car il est défini sur une base de  $E$ .

*Démonstration.* Comme  $\dim(E^*) = n$ , il suffit de montrer que la famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est libre.

Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$  tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0.$$

Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En évaluant la relation précédente en  $e_j$ , on récupère  $\lambda_j = 0$ .

La famille est donc libre, puis c'est une base de  $E^*$ . □

**Proposition 29.** *Calcul d'intégrales sans primitiver !*

*Soit  $n \in \mathbf{N}$  et soient  $x_0, \dots, x_n$   $n+1$  réels deux à deux distincts. Il existe  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$  tel que*

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X], \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k P(x_k).$$

*Démonstration.* Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $\varphi_k : P \in \mathbf{K}_n[X] \mapsto P(x_k)$ .

Il est clair que  $\varphi_k$  est linéaire pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$  tel que

$$\lambda_0 \varphi_0 + \dots + \lambda_n \varphi_n = 0.$$

Soient  $L_0, \dots, L_n$  les polynômes d'interpolation de Lagrange en les points  $x_0, \dots, x_n$  définis à la sous-partie 4.1. On évalue la relation précédente en  $L_j$  ( $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ).

Comme  $L_j(x_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , on a  $\lambda_j = 0$ . La famille  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est donc libre. Elle contient  $n + 1$  éléments dans  $\mathbf{K}_n[X]^*$  de dimension  $n + 1$ , c'est donc une base de  $\mathbf{K}_n[X]^*$ .

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'application  $\psi : P \in \mathbf{K}_n[X] \mapsto \int_0^1 P(t) dt \in \mathbf{K}_n[X]^*$ , ainsi il existe  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$  unique tel que  $\psi = a_0\varphi_0 + \dots + a_n\varphi_n$ , soit

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X], \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k P(x_k).$$

□

**Proposition 30.** *Dualité dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .*

Soit  $u \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$ . Il existe une unique matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  telle que :

$$\forall m \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad u(M) = \text{Tr}(AM).$$

*Démonstration.* Soit l'application  $\varphi$  définie par

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^* \\ A & \longmapsto (M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mapsto \text{Tr}(AM)) \end{cases}.$$

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , on a

$$\varphi(A + \lambda B)(M) = \text{Tr}((A + \lambda B)M) = \text{Tr}(AM + \lambda BM) = \text{Tr}(AM) + \lambda \text{Tr}(BM) = \varphi(A)(M) + \lambda \varphi(B)(M).$$

Ainsi,  $\varphi(A + \lambda B) = \varphi(A) + \lambda \varphi(B)$ .

Comme  $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*) (= n^2)$ , pour montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme, il suffit de montrer que  $\varphi$  est injective.

Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \text{Ker}(\varphi)$ . Ainsi, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ,  $\varphi(A)(M) = \text{Tr}(AM)$ .

En prenant  $M = \overline{A}^\top$  (la transposée de la matrice contenant les éléments conjugués de  $A$ ), on a

$$0 = \varphi(A)(\overline{A}) = \text{Tr}(A\overline{A}^\top) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \overline{a_{i,k}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2.$$

Or,  $|a_{i,k}|^2 \geq 0$  pour tout  $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , donc  $a_{i,k} = 0$ , et  $A = 0$ . Ainsi  $\text{Ker}(\varphi) \subset \{0\}$ . L'inclusion réciproque est claire, on a  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$  et  $\varphi$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$ .

Si  $u \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$ , il existe donc  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  unique tel que  $u = \varphi(A)$ ,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad u(M) = \varphi(A)(M) = \text{Tr}(AM).$$

□