Chapitre 1 : Exercices

Exercice 1.

Montrer que l'ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3,\ x + 2y = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^3$ et en donner une base.

Exercice 2.

Montrer que l'ensemble $G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4,\ x + y + t = y - 2z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^4$ et en donner une base.

Exercice 3.

Montrer que l'ensemble $H = \left\{P \in \mathbf{K}[X],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

Exercice 4.

La famille $((1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, -1), (0, 1, 1, 1))$ est-elle une base de $\mathbf{K}^4$?

Exercice 5.

Pour quelle valeur de $a \in \mathbf{K}$ la famille $((1, -1, 0), (2, -1, 2), (1, 0, a))$ est-elle une base de $\mathbf{K}^3$?

Exercice 6.

Montrer que la famille $\mathscr{B} = (X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbf{K}_2[X]$. Donner les coordonnées de 1 dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbf{K}^3 \longrightarrow \mathbf{K}^2$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z).$$

Montrer que f est linéaire. Préciser le noyau et l'image de f.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbf{K}_2[X] \longrightarrow \mathbf{K}^2$ définie par

$$f(P) = \left(P(0), P'(0)\right).$$

Montrer que f est linéaire. Préciser le noyau et l'image de f.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbf{K}_2[X] \longrightarrow \mathbf{K}$ définie par

$$f(P) = P(0) + P(1).$$

Montrer que f est linéaire. Préciser le noyau et l'image de f.

Exercice 10.

Soit $f : \mathbf{K}_3[X] \longrightarrow \mathbf{K}_3[X]$ définie par

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{K}_3[X]$.

Exercice 11.

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer M^n où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.

Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.

Soit $a \in \mathbf{K}$. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbf{K}_3[X]$ de l'endomorphisme $u : \mathbf{K}_3[X] \longrightarrow \mathbf{K}_3[X]$ défini par $u(P) = P'$.

Exercice 16.

On considère l'application $u : \mathbf{K}_3[X] \longrightarrow \mathbf{K}_3[X]$ défini par $u(P) = P + P'(X+1)$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_3[X])$.
2. Déterminer la matrice M de u dans la base $\left(1, X, X^2, X^3\right)$.
3. Montrer que M est inversible. Que peut-on en déduire pour u ?
4. Déterminer $\operatorname{Ker}(M - \mathrm{I}_4)$. En déduire $\operatorname{Ker}\left(u - \mathrm{id}_{\mathbf{K}_3[X]}\right)$.
5. Déterminer $\operatorname{Im}(M - \mathrm{I}_4)$. En déduire $\operatorname{Im}\left(u - \mathrm{id}_{\mathbf{K}_3[X]}\right)$.

Exercice 17.

Soit $u : \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^2$ l'endomorphisme de $\mathbf{K}^2$ défini par

$$u(x, y) = (x - 2y, x + 4y).$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{K}^2$.
2. Justifier que la famille $\mathscr{B} = ((2, -1), (1, -1))$ est une base de $\mathbf{K}^2$. Donner la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
3. En déduire la matrice de u^n dans la base canonique pour $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 18.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose $u = i + k$, $v = i + j$ et $w = i + j + k$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 19.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x$. Montrer que la famille de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Exercice 20.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par $f_n(x) = \mathrm{e}^{nx}$. Montrer que la famille de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Exercice 21.

Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on définit $f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par $f_n(x) = \cos(nx)$.

1. Pour $(n, m) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}^\star$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire que la famille de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Exercice 22.

Soient $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, 1))$, $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1, 1))$ et

$$H_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4,\ x = z, y = t\right\} \text{ et } H_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4,\ x + t = y + z = 0\right\}.$$

A-t-on $\mathbf{K}^4 = F \oplus G \oplus H_1$? Même question avec $\mathbf{K}^4 = F \oplus G \oplus H_2$.

Exercice 23.

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Soient

$$F = \left\{f \in E,\ f(0) = f'(0) = 0\right\},\ G = \{f \in E,\ f \text{ linéaire}\} \text{ et } H = \{f \in E,\ f \text{ constante}\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 24.

Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{K}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On définit également

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3,\ x + y + z = 0\right\} \quad \text{et} \quad D = \mathrm{Vect}((1, 0, 1)).$$

1. Montrer que $\mathbf{K}^3 = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe précédente.

Exercice 25.

Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{K}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

On définit également $H = \mathrm{Vect}((1, -3, 0), (0, 1, -1))$ et $D = \mathrm{Vect}((3, 1, 1))$.

1. Montrer que $\mathbf{K}^3 = H \oplus D$.

2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans la base $((1,-3,0),(0,1,-1),(3,1,1))$.

Exercice 26.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{K}_2[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbf{K}_2[X], \quad u(P) = X^2 P\left(\frac{1}{X}\right).$$

On définit également $H = \mathrm{Vect}\left(1, X^2\right)$ et $D = \mathrm{Vect}(X)$.

1. Montrer que $\mathbf{K}_2[X] = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans la base $\left(1, X, X^2\right)$.

Exercice 27.

Montrer que l'ensemble $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 28.

Montrer qu'il n'existe pas de couple $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AB - BA = \mathrm{I}_n$.

Exercice 29.

Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AB - BA = A$. montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$.

Exercice 30.

Calculer la trace des endomorphismes suivants :

1. $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$, $u(x,y,z) = (x+y+z, x+z, y+z)$;
2. $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$, $u(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$;
3. $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_3[X])$, $u(P) = P + P'$;
4. $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_3[X])$, $u(P) = P(X+1) - P'$.

Exercice 31.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle toutes les colonnes de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont nulle, sauf la dernière.
2. Montrer que $u^2 = \mathrm{Tr}(u)\,u$.

Exercice 32.

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
2. Écrire la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe précédente.
3. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 33.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $MM^\top$ et $M^\top M$ sont symétriques.

Exercice 34.

Soient A, B deux matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que AB est symétrique si, et seulement si, A et B commutent.

Exercice 35.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

1. Exprimer les coefficients de $X^\top X$ en fonction des coefficients de X. Montrer que $X^\top X = 0$ si, et seulement si, $X = 0$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(M) = \operatorname{Ker}\left(M^\top M\right)$.

Exercice 36.

Partie 1

Soit l'application $f : \mathbf{K}^2 \longrightarrow \mathbf{K}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{K}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{4}(x + 3y, 3x + y).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{K}^2$ et vérifier que $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id}_{\mathbf{K}^2})$.
4. (Pour 5/2). Justifier que f est diagonalisable et préciser les sous-espaces propres de f.

Partie 2

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id}_E)$.

1. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de id_E.
2. Justifier que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{id}_E\right)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{id}_E\right)$.
4. Calculer $\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{id}_E\right) \circ (f - \mathrm{id}_E)$. En déduire que $\operatorname{Ker}\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{id}_E\right) = \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)$.
5. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaisons linéaires de f et id_E.
6. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un couple $(a_n, b_n) \in \mathbf{K}^2$ tel que : $f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_E$. Déterminer a_0, b_0, a_1 et b_1. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour n dans $\mathbf{N}$.

Exercice 37.

On pose $E = \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Soit T l'application définie sur E par

$$\forall f \in E, \quad T(f) : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}.$$

1. Vérifier que T est bien un endomorphisme de E.
2. Montrer que si $f \in E$, alors $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et calculer $T(f)'$.
3. T est-il surjectif ?
4. Que dire de $T(f)$ si f est impaire ?
5. T est-il injectif ?

Exercice 38.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer :

$$f \circ g = 0 \iff \operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Ker}(f).$$

2. On suppose maintenant E de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $\mathscr{C} = \{g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = 0\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et donner sa dimension.

Exercice 39.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}^\star$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Justifier que u n'est pas bijective.
2. Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer aussi que la famille $\left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre.
3. En déduire que $p \leq n$.

Exercice 40.

Soit $E = \mathbf{K}_n[X]$ pour $n \in \mathbf{N}^\star$. On définit Δ_n par :

$$\forall P \in E, \quad \Delta_n(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que $\Delta_n \in \mathscr{L}(E)$.
2. (a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer le degré de $\Delta_n\left(X^k\right)$ en fonction de k.
   (b) Si $P \in E$, en déduire le degré de $\Delta_n(P)$ en fonction du degré de P.
3. Justifier que $\operatorname{Ker}(\Delta_n) = \mathbf{K}_0[X]$.
4. En déduire que $\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbf{K}_{n-1}[X]$.
5. Justifier que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un unique polynôme $Q_k \in E$ tel que $\Delta_n(Q_k) = X^k$ et $Q_k(0) = 0$.
6. Montrer que
$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], \quad \frac{Q'_{k+1} - Q'_{k+1}(0)}{k+1} = Q_k.$$