Chapitre 2 : Séries numériques

Table des matières

Dans le chapitre, $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et un élément de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

1 Rappels sur les suites

Dans cette partie, on fait des rappels sur les suites numériques. Toutes les preuves sont renvoyées au cours de TSI 1.

1.1 Généralités sur les suites

Définition 1. *Suite croissante, décroissante, constante.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que :

(i) *$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **croissante** si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$;*
(ii) *$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$;*
(iii) *$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **constante** si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n$.*

Définition 2. *Suite majorée, minorée, bornée.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que :

(i) *$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq M$;*
(ii) *$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **minorée** s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq M$;*
(iii) *$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **bornée** si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée et majorée.*

1.2 Rappels sur les limites

Définition 3. *Convergence d'une suite.*
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe. Soit $\ell \in \mathbf{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge** vers ℓ si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad (n \geq N) \Longrightarrow (|u_n - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

Proposition 1. *Propriétés algébriques.*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites complexes qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Alors :

(i) *si $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$;*
(ii) *la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell\ell'$;*
(iii) *si $\ell' \neq 0$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.*

L'étude des suites complexes n'est pas aisée. La proposition suivante assure que l'on peut se ramener à l'étude de suites réelles.

Proposition 2. *Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe. La suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si, et seulement si, les suites $(\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent.*
De plus, en cas de convergence, en notant ℓ, ℓ_1 et ℓ_2 les limites respectives des suites $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$, on a $\ell = \ell_1 + \mathrm{i}\ell_2$.

Les deux résultats suivants sont les deux principaux résultats de convergence.

Théorème 1. *Théorème de la limite monotone.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.

(i) *si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ;*
(ii) *si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et non majorée, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$;*
(iii) *si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ;*
(iv) *si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et non minorée, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $-\infty$.*

Théorème 2. *Théorème d'encadrement.*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.

Proposition 3. *Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in I$, alors ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.

La proposition suivante est d'un usage constant.

Proposition 4. *Croissances comparées.*

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbf{R}$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\ln^\beta(n)} = +\infty.$$

1.3 Suites usuelles

1.3.1 Suite arithmétique

Définition 4. *Suite arithmétique.*

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **arithmétique** s'il existe r tel que :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r.$$

r s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Proposition 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Proposition 6. *Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.*

1.3.2 Suite géométrique

Définition 5. *Suite géométrique.*

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **géométrique** s'il existe q tel que :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

q s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Proposition 7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison r. Alors :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 q^n.$$

Proposition 8. *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{C}$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$.*

Proposition 9. *Soit $q \in \mathbf{C}$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 si, et seulement si, $|q| < 1$.*

2 Convergence d'une série numérique

2.1 Généralités

Définition 6. *Série numérique.*

La série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, notée $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$

*La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est appelée la **suite des sommes partielles** de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.*

Définition 7. *Convergence d'une série.*
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ***converge*** *si la suite des sommes partielles converge, et* ***divergente*** *sinon.*

Définition 8. *Somme et reste d'une série.*
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors :*

(i) *on appelle* ***somme de la série*** *la limite de la suite des sommes partielles que l'on note* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

(ii) *la reste d'ordre* $n \in \mathbf{N}$ *de la série est le nombre* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. *On notera que l'on a* $S_n + R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

⚠On veillera à n'utiliser ces notions qu'**après** avoir prouvé la convergence d'une série.

Remarque 1.

1. Si la série commence à $p \in \mathbf{N}$, on note $\sum_{n\geq p} u_n$.
2. Si la série est convergente, sa somme est notée $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$.
3. La nature de la série (convergente ou divergente) ne dépend pas des premiers termes.

Exemple 1. La série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Exemple 2. La série $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ diverge car

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Proposition 10. *Une condition nécessaire de convergence.*
Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge vers* 0.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite finie, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. □

⚠Cette proposition est loin de donner une condition suffisante de convergence !

Définition 9. *Divergence grossière.*
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ***diverge grossièrement*** *si* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *ne converge pas vers* 0.

Exemple 3. Les séries $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ et $\sum_{n\geq 0} n$ divergent grossièrement.

⚠La réciproque est fausse.

Proposition 11. *Linéarité de la somme.*
Soient $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. *Si les séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *convergent, alors la série* $\sum_{n\geq 0} (au_n + bv_n)$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + bv_n) = a\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + b\sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(au_k + bv_k) = a\sum_{k=0}^{n}u_k + b\sum_{k=0}^{n}v_k$ et de remarquer que le membre de droite converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers $\displaystyle a\sum_{n=0}^{+\infty}u_n + b\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$. □

Proposition 12. *Lien suite/série.*
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration. La preuve est en deux temps.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Il suffit à nouveau de remarquer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) + u_0.$$

□

Exemple 4. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge car pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2.2 Série géométrique

Définition 10. *Série géométrique.*
Pour $q \in \mathbf{C}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}q^n$ s'appelle la ***série géométrique*** *de raison q.*

Proposition 13. *Soit $q \in \mathbf{C}$. La série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 0}q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$, et on a alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration. Déjà, si $q = 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}q^n$ diverge grossièrement. On suppose donc $q \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Or, $\left(q^{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$ (rappelons que $q \neq 1$). Le cas échéant, on a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}q^{n+1} = 0$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}q^k = \frac{1}{1-q}.$$

□

Remarque 2. Parfois, il faut factoriser par le premier terme pour faire apparaître une « vraie » série géométrique. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geq p}q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$ et le cas échéant, on a alors :

$$\sum_{n=p}^{+\infty}q^n = \frac{q^p}{1-q}.$$

3 Séries à termes positifs

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous énonçons un résultat qui nous servira constamment dans cette partie.

Proposition 14. *Caractérisation de la convergence des séries à termes positifs.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *une suite de termes* ***positifs****. La série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.*

Démonstration. La preuve se fait en deux temps.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on remarque que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles est majorée.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On commence par remarquer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant majorée, par le théorème de la limite monotone, elle converge. Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

□

3.1 Les théorèmes de comparaisons

Théorème 3. *Théorème de comparaison par inégalité.*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *deux suites de réels positifs telles que pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

(i) *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *converge, alors la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge et,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *diverge, la série* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*

Remarque 3. Il est suffisant d'avoir l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang pour pouvoir utiliser le théorème de comparaison.

Démonstration. (i) En utilisant la positivité de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on remarque que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k. \tag{1}$$

La suite des sommes partielles de la suite positive $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, donc d'après la proposition 14 converge.
Par passage à la limite dans la ligne (1), on récupère finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors comme la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, on a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$, le théorème de comparaison (pour les suites !) permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$: la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

□

Exemple 5. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a $0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Or la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (série géomeétrique de raison $\frac{1}{2}$).

Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge.

Théorème 4. *Théorème de comparaison par équivalence.*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites positives sur un voisinage de $+\infty$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors,

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge.}$$

⚠*En cas de convergence, on ne peut rien dire sur les sommes.*

Remarque 4. Le résultat se généralise aux suites négatives sur un voisinage de $+\infty$.

Démonstration. On rappelle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si, par définition, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\varepsilon_n \leq 1$ de sorte que $u_n \leq 2v_n$ pour $n \geq N$.
Ainsi, si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La preuve est analogue.

□

Exemple 6.

1. Comme $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)}$. Or, d'après l'exemple 3, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Le théorème de comparaison par équivalence des séries à termes positifs assure que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
2. Comme $\sin(3^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^{-n}$ et la série $\sum_{n\geq 0} 3^{-n}$ converge (série géométrique de raison $1/3$), par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} \sin\left(3^{-n}\right)$ converge.

Proposition 15. *Règle de d'Alembert.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes ***strictement positifs*** *telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.*

(i) *Si $\ell < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*

(ii) *Si $\ell > 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.*

⚠Lorsque $\ell = 1$, on ne peut rien dire. Par exemple, la série $\sum_{n\geq 0} 1$ diverge (grossièrement), alors que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Remarque 5. La réciproque de la règle de d'Alembert est fausse. Par exemple, soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

On vérifie facilement que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et pourtant la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Démonstration. (i) Soit $a = \frac{\ell+1}{2} \in]\ell, 1[$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a$, soit $u_{n+1} \leq a u_n$.

Une récurrence immédiate montre alors que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad u_{N+p} \leq a^p u_N.$$

Comme la série $\sum_{p\geq 0} a^p$ converge (série géométrique dont la raison est comprise entre -1 et 1 strictement), par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{p\geq 0} u_{N+p}$ converge, donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(ii) La preuve est analogue. Soit $a = \frac{\ell+1}{2} \in]1, \ell[$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq a$, soit $u_{n+1} \geq a u_n$.

Une récurrence immédiate montre alors que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad u_{N+p} \geq a^p u_N.$$

Comme la série $\sum_{p\geq 0} a^p$ diverge (série géométrique la raison est strictement plus grande que 1), par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{p\geq 0} u_{N+p}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

□

Exemple 7. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge car pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{n!} > 0$ et

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

3.2 Séries absolument convergentes

Définition 11. *Convergence absolue.*

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ***converge absolument*** *si la série* $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ *converge.*

Proposition 16. *La convergence absolue entraîne la convergence.*

Démonstration. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série qui convergence absolument. Soit $v_n = u_n + |u_n|$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq v_n \leq 2|u_n|$.

Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

Pour conclure, il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = v_n - |u_n|$ et d'utiliser la proposition 11. □

⚠La réciproque est fausse, on peut montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

Proposition 17. *Inégalité triangulaire pour les séries.*
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente. Alors,

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que (inégalité triangulaire pour les sommes finies)

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

et de faire tendre n vers $+\infty$. □

3.3 Les séries de Riemann

Les séries de Riemann forme une famille de séries classiques.

Définition 12. *Séries de Riemann.*
On appelle ***série de Riemann*** *toute série du type $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.*

On admettra la proposition suivante que l'on prouvera au chapitre 4.

Proposition 18. *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

4 Développement décimal d'un réel

Théorème 5. *Développement décimal illimité propre.*
Soit $x \in \mathbf{R}$. Il existe $a_0 \in \mathbf{Z}$ et une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} \in [\![0,9]\!]^{\mathbf{N}^\star}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'appelle le ***développement décimal illimité propre*** *du réel x.*

Remarque 6. Le théorème 5 assure en particulier que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Démonstration. On procède par analyse-synthèse.

Analyse. On suppose qu'une telle suite existe. Alors, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^p}. \tag{2}$$

En prenant $p = 0$ dans (2), on a

$$a_0 \leq x < a_0 + 1,$$

donc $a_0 = \lfloor x \rfloor$: a_0 est unique.
Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vérifient (2) et sont les seuls à vérifier la relation (2) avec $p = n$.
En prenant $p = n + 1$ dans (2), on a donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

d'où

$$a_{n+1} \leq 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) < a_{n+1} + 1.$$

Il s'ensuit que $a_{n+1} = \lfloor 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor$, ainsi a_{n+1} est uniquement défini.
Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ existe, elle est unique.

Synthèse. Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie ci-dessus : $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $a_n = \lfloor 10^n \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor$.
Par définition de la partie entière, il est clair que l'on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

Il est clair que $a_0 \in \mathbf{Z}$. Par définition de a_0, on a $x - a_0 \in [0, 10[$. Ainsi :

$$a_1 = \lfloor 10 \left(x - a_0 \right) \rfloor \in [\![0, 9]\!].$$

Si l'on suppose $a_1, \ldots, a_n \in [\![0, 9]\!]$, par définition de a_{n+1}, on a

$$a_{n+1} = \lfloor 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor.$$

Or, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n},$$

d'où

$$0 \leq 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) < 10.$$

Ainsi, $a_{n+1} \in [\![0, 9]\!]$.
Cela montre que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $a_n \in [\![0, 9]\!]$.
On a montré qu'une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ existe et vérifie les conditions requises.

□

En fait, on peut simplifier l'expression de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ obtenue. Nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 1. *Pour tout $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, on a $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.*

Démonstration. Par définition, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, ainsi $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.
Comme $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbf{Z}$ et $\lfloor x \rfloor + n + 1 \in \mathbf{Z}$, on en déduit que $\rfloor x + n \lfloor = \lfloor x + \rfloor x + n$.

□

Proposition 19. *En reprenant les notations du théorème 5, on a*

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad a_n = \lfloor 10^n n \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor.$$

Démonstration. D'après la preuve du théorème 5, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n} \tag{3}$$

et, on avait obtenu

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad a_n = \lfloor 10^n \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor = \lfloor 10^n x - 10 \sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k} \rfloor. \tag{4}$$

La ligne (3) donne en particulier

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k} \leq 10^{n-1} x < \sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k} + 1.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k} \in \mathbf{Z}$, on a $\lfloor 10^{n-1} x \rfloor = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{n-1-k}$. Ainsi, en reprenant (3), on a

$$a_n = \lfloor 10^n x - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \rfloor.$$

Le lemme 1 donne finalement

$$a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor.$$

□

La notion de développement décimal illimité propre permet de caractériser les nombres rationnels.

Proposition 20. *Caractérisation des rationnels.*
Soit $x \in \mathbf{R}$. x est rationnel si, et seulement si, la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration. On traite séparemment les deux équivalences.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si x est un rationnel positif, on pose la division du numérateur p par le dénominateur q, division que l'on poursuit après la virgule. À chaque étape de la division, il n'y a que q restes possibles, l'un des nombres $0, 1, \ldots, q-1$ et, après au plus $q+1$ étapes, on aura obtenu deux restes égaux (principe des tiroirs). La même séquence de décimales recommence alors.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Comme $x \in \mathbf{Q}$ si, et seulement si $x - \lfloor x \rfloor \in \mathbf{Q}$, on peut supposer $x \in [0, 1[$. On écrit alors

$$x = 0{,}d_1 \ldots d_m c_1 \ldots c_p c_1 \ldots c_p \ldots.$$

Or, $x \in \mathbf{Q}$ si, et seulement si $10^m x - \lfloor 10^m x \rfloor \in \mathbf{Q}$, ainsi il suffit de montrer que $y = 0{,}c_1 \ldots c_p c_1 \ldots c_p \ldots \in \mathbf{Q}$. On remarque que

$$10^p y = c_1 10^{p-1} + \cdots + c_p + y \iff y = \frac{c_1 10^{p-1} + \cdots + c_p}{10^p - 1}.$$

Or $c_1 10^{p-1} + \cdots + c_p \in \mathbf{N}$, on en déduit que $y \in \mathbf{Q}$, puis que $x \in \mathbf{Q}$.

□

Exemple 8. On a $\dfrac{22}{7} = 3{,}142857\,142857\ldots.$

5 Exemples

Pour étudier la nature d'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$, on peut essayer d'appliquer le plan suivant :

1. On vérifie (rapidement) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. Si ce n'est pas le cas, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
2. Un équivalent de u_n ou $|u_n|$.
3. Une inégalité portant sur u_n ou $|u_n|$.
4. La règle de d'Alembert avec $|u_n|$.

Exemple 9. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge grossièrement.

Exemple 10. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

On a

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge absolument, donc converge.

Exemple 11. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)+\sin(n)}{2^n}$.

On a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\frac{\cos(n)+\sin(n)}{2^n}\right| \leq \frac{2}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n-1}}$, par comparaison par inégalité des séries à termes positives, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)+\sin(n)}{2^n}$ converge absolument, donc converge.

Exemple 12. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$.

On a

$$\forall n \geq 3, \quad \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Exemple 13. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

En utilisant les développements limités de sin et Arctan en 0, on a

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Ainsi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}.$$

Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{6n^3}$ converge, par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge.

Exemple 14. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2^n}$.

On a

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{\frac{(n+1)^2-1}{2^{n+1}}}{\frac{n^2-1}{2^n}} = \frac{\frac{(n+1)^2-1}{n^2-1}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2^n}$ converge.

Exemple 15. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!}$.

On a

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, d'où par continuité de exp en 1, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} > 1.$$

Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!}$ diverge.

6 Compléments

6.1 Théorème d'Abel

Nous nous proposons de prouver le résultat suivant.

Théorème 6. *Théorème d'Abel.*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *telle que la suite* $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *soit bornée. Soit aussi* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de réels décroissante et de limite nulle.*

Alors, la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ *converge.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On pose aussi $A_{-1} = 0$. On remarque donc que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = A_n - A_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1})\, b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k\,(b_k - b_{k+1})\,. \tag{5}$$

Comme $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle, on en déduit que la suite $(A_n b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

De plus, en notant $M \in \mathbf{R}_+$ un majorant de la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |A_k\,(b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - b_{k+1}|\,.$$

En utilisant la décroissance de $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on a pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$ et en notant que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend des valeurs positives, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} |A_k\,(b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) \leq M b_0.$$

D'après la proposition 14, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} A_n\left(b_n - b_{n+1}\right)$ converge absolument, donc converge. En particulier, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} A_n\left(b_n - b_{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

En reprenant la ligne (5), on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

□

Exemple 16. On s'intéresse à la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$.

On pose $a_n = \cos(n)$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est décroissante et de limite nulle. De plus,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbf{N}^\star,\quad \sum_{k=1}^{n}\cos(k) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} \times \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}/2}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}/2}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)/2} \times \frac{-2\mathrm{i}\sin(n/2)}{-2\mathrm{i}\sin(1/2)}\right)\\
&= \frac{\sin(n/2)\cos((n+1)/2)}{\sin(1/2)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\quad \left|\sum_{k=1}^{n}\cos(k)\right| \leq \frac{1}{\sin(1/2)}.$$

La suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(k)\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est donc bornée. D'après le théorème d'Abel, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

6.2 Formule de Stirling

Proposition 21. *Formule de Stirling.*
On a

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Démonstration. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(u_n)$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} \times \frac{n^n\sqrt{n}}{n!\mathrm{e}^n}\right)\\
&= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1.
\end{aligned}$$

On fait le développement limité de $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ à l'ordre 3 lorsque n tend vers $+\infty$, ainsi

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ainsi $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$. Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} -\dfrac{1}{12n^2}$ converge, par comparaison par équivalence des séries à termes négatifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge.

D'après la proposition 12, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge. Par continuité de la fonction exp sur $\mathbf{R}$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers une limite strictement positive ℓ. On a donc

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\ell. \tag{6}$$

Pour obtenir la valeur de ℓ, on utilise le résultat obtenu à la sous-partie 5.1 du chapitre 2 sur les intégrales de Wallis :

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}. \tag{7}$$

En utilisant (7) dans (6), on obtient

$$\frac{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{2n}\ell}{\left(\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\ell 2^n\right)^2} \times \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}},$$

soit, après simplifications,

$$\ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}.$$

Ainsi,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

□