Chapitre 2 : Exercices

Exercice 1.

Soient les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par : $u_1 = 12$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

1. Calculer u_2 et v_2.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $w_n = u_n - v_n$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est géométrique dont on donnera la raison.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est constante.
4. Exprimer w_n en fonction de n.
5. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 2.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.
On introduit la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.

1. Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique.
2. En déduire une expression de t_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 3.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 4}$.
On introduit la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $t_n = u_n^2$.

1. Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique.
2. En déduire une expression de t_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 4.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a \neq 1$. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Trouver une valeur de $\ell \in \mathbf{R}$ pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ soit géométrique.
2. En déduire une expression explicite de v_n, puis de u_n en fonction de n.
3. Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

Exercice 5.

Calculer les limites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{n^2+2}{n-1}$;
3. $u_n = \dfrac{n^3 + n^2 - 3}{\mathrm{e}^n + n + 7}$;
4. $u_n = \mathrm{e}^n - 2^n + 1$;
5. $u_n = \ln(n) - \sqrt{n} + 3^n$;
6. $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$;
7. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} + 3\ln(n) + 2}{\ln(n^3) - \sqrt{n} + 4}$;
8. $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$;
9. $u_n = (-n+2)\,\mathrm{e}^{-n}$;
10. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$;

11. $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$; 12. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^n$; 13. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 6.

Soit $a \in [1,+\infty[$ et soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x}+x\right)$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : $u_0 \in [\sqrt{a}, a]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Calculer $f(\sqrt{a})$ et $f(a)$ et faire apparaître ces valeurs dans le tableau précédent. En déduire que pour tout $x \in [\sqrt{a}, a]$, $f(x) \in [\sqrt{a}, a]$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [\sqrt{a}, a]$ (ainsi $u_n \neq 0$, donc la suite est bien définie).
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, puis convergente vers une limite ℓ.
5. Montrer que ℓ vérifie l'équation $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\ell}+\ell\right)$. En déduire la valeur de ℓ.
6. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{a}$ et on suppose que $v_0 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
   Montrer que
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}.$$
   En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} \leq v_n^2$.
7. Montrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0,1[$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $x_n < x_{n+1}$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers un réel noté ℓ. Montrer aussi que $0 < \ell \leq 1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $x_n \leq \ell$.
5. Montrer que $\ell = 1$.

Exercice 8.

On considère les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 - 3x + 1.$$

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : $x_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. On notera α cette solution.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.
   En déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
   (b) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbf{R}$ et déterminer son signe sur $\mathbf{R}_+$.
3. (a) Montrer que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < \dfrac{1}{2}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} \geq x_n$.
   (c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.

Exercice 9.

Étudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes en cas de convergence.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n\left(n+1\right)}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq1}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq1}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 10.

Soit $x\in\mathbf{R}$. On s'intéresse à la nature de la série $\displaystyle S\left(x\right)=\sum_{n\geq0}nx^n$.

1. Conclure lorsque $|x|\geq1$.
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kx^k$ où $n\in\mathbf{N}$, pour $|x|<1$.
3. En déduire, lorsque $|x|<1$, que $S\left(x\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 11.

On admet que la série $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{1}{n!}$ converge et $\displaystyle \mathrm{e}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{n+1}{n!}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{n^2-2}{n!}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{n^3}{n!}$.

Exercice 12.

Étudier la nature des séries de terme général suivant.

1. $\displaystyle\frac{2n-1}{n^3+1}$;
2. $\displaystyle\frac{\sin\left(n\right)}{2^n}$;
3. $\displaystyle n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$;
4. $\displaystyle\frac{n^2}{\left(-4\right)^n}$;
5. $\displaystyle 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$;
6. $2^n n$;
7. $n^2\mathrm{e}^{-n}$;
8. $\displaystyle n\cos\left(n\right)\sin\left(\frac{\pi}{n^3}\right)$;
9. $\displaystyle n^2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$;
10. $\displaystyle\frac{\cos\left(n\right)}{n^3-n}$;
11. $\displaystyle \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;
12. $n^n\mathrm{e}^{-n^2}$;
13. $\displaystyle\frac{n^n}{n!}$;
14. $\displaystyle\frac{1}{n}\sin\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi\right)$;
15. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;
16. $\displaystyle\frac{\ln^2\left(n\right)}{n}$;
17. $\displaystyle\frac{2\times4\times\cdots\times2n}{n^n}$;
18. $\displaystyle\frac{1!+2!+\cdots+n!}{\left(n+2\right)!}$;
19. $\displaystyle\frac{\mathrm{Arctan}\left(n\right)}{\sqrt{n}}$;
20. $\displaystyle\frac{\mathrm{Arcsin}\left(1/n\right)}{n}$;
21. $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 13.

Étudier la série de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi/n}\frac{\sin\left(t\right)}{1+t}\mathrm{d}t$.

Exercice 14.

Soit $a\in\mathbf{R}$. Étudier la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{n!}{n^{an}}$.

Exercice 15.

Soit $\left(a,b\right)\in\mathbf{R}^2$ et $u_n=\ln\left(n\right)+a\ln\left(n+1\right)+b\ln\left(n+2\right)$.
Donner le couple $\left(a,b\right)\in\mathbf{R}^2$ pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}u_n$ converge. Calculer alors la somme de la série.

Exercice 16.

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{R}$, la série $\sum_n \left(\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt[3]{n^3 + 2} \right)$ converge-t-elle ?

Exercice 17.

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs. Montrer que les séries suivantes convergent.

1. $\sum_{n \geq 0} \max \{u_n, v_n\}$;
2. $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n v_n}$;
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$.

Exercice 18.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$.
Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 et déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 19.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels positifs et soit $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$.
Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

Exercice 20.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Soit $v_n = 2^n u_{2^n}$.
Montrer que les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Exercice 21.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1. Soit $v_n = \ln(n^a u_n)$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge.
2. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ converge.
3. En déduire qu'il existe $A \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}$.
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 22.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ u_n = H_n - \ln(n) \text{ et } v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe un réel γ tel que

$$H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. Trouver un couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \frac{1}{n\,(2n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{2n-1}.$$

4. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(2n-1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 23.

Dans cet exercice, la fonction ch est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} x_n^2$ converge.
   Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$u_{n+1} = \frac{u_n}{\mathrm{ch}\,(u_n)}.$$
2. Faire le tableau de variations de la fonction ch.
3. Donner le développement limité de ch à l'ordre 2 au voisinage de 0.
4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et donner sa limite.
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement négative.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite nulle.
   (c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln\,(1+v_k)$. En déduire que la série de terme générale v_n diverge.
6. (a) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 diverge.
   (c) En déduire que la série de terme général u_n diverge.