Une preuve élémentaire du théorème de Weierstrass

Erik Thomas*

Résumé

Dans cette note, nous donnons une nouvelle preuve du théorème d'approximation de Weierstrass. L'approche consiste à montrer que ce résultat est équivalent au problème des moments que nous prouvons de manière élémentaire.

1 Introduction

Le but de cette note est de donner une preuve élémentaire du théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass. L'argument principal est l'équivalence entre les énoncés 1.1 et 1.2. Nous montrons alors l'énoncé 1.2 lorsque I est un segment (partie 2).

Soit I un intervalle de longueur finie.

Énoncé 1.1. *Toute fonction $f \in C^0(I) \cap L^2(I)$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.*

Énoncé 1.2. *Si une fonction continue $f \in C^0(I) \cap L^2(I)$ est telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_I f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle.*

Nous allons d'abord montrer que les énoncés 1.1 et 1.2 sont équivalents.

Démonstration. On se fixe un intervalle I de longueur finie. $L^2(I)$ désigne les fonctions mesurables de dont le carré est Lebesgue-intégrable sur I.

($\Rightarrow$) Soit $f \in C^0(I) \cap L^2(I)$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_I f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$. En particulier, pour toute fonction fonction polynomiale P définie sur I, $\displaystyle\int_I f(t)P(t)\mathrm{d}t = 0$.

Soit $(P_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur I. Comme I est de longueur finie, on a :

$$0 = \lim_{p\to+\infty} \int_I f(t)P_p(t)\mathrm{d}t = \int_I f^2(t)\mathrm{d}t.$$

On en déduit que f est nulle presque-partout, puis par continuité, f est nulle.

($\Leftarrow$) Soit $E = L^2(I) \cap C^0(I)$ que l'on munit du produit scalaire $(f, g) \in E^2 \mapsto \displaystyle\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $F = \mathrm{Vect}\,(x \in I \mapsto x^n, n \in \mathbf{N})$. On a donc $F^\perp = \{0\}$. Or, $F^\perp = \overline{F}^\perp$, on en déduit que $\overline{F} = E$.

Soit $f \in C^0(I) \cap L^2(I)$ et soit $\varepsilon > 0$. Par densité, il existe $g \in C^1(I) \cap L^2(I)$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. D'après ce qui précède, il existe une fonction une fonction polynomiale Q définie sur I telle que $\|g' - Q\|_2 \leq \varepsilon$. Soit $x_0 \in I$, on note P l'unique fonction polynomiale sur I telle que $P' = Q$ et $P(x_0) = g(x_0)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, \quad |g(x) - P(x)| &\leq \left|\int_{x_0}^{x} |g'(t) - Q(t)|\right| \mathrm{d}t \\
&\leq \sqrt{\left|\int_{x_0}^{x} (g'(t) - Q(t))^2 \mathrm{d}t\right| |x - x_0|} \\
&\leq \varepsilon\lambda(I),
\end{aligned}$$

*erik.thomas@ens-rennes.fr

où $\lambda(I)$ désigne la longueur de I. Il s'ensuit que $\|f-P\|_\infty \leq (\lambda(I)+1)\varepsilon$, ce qui termine la preuve.

□

Remarque 1. On remarque que l'implication directe se sert uniquement du fait qu'un intervalle de longueur finie est de mesure de Lebesgue finie. Cette implication reste vraie si I est un intervalle quelconque muni d'une mesure μ telle que $\mu(I) < +\infty$.

2 Preuve du de l'énoncé 1.2 lorsque I est compact

La preuve proposée ici est élémentaire.

Démonstration. Il suffit de se placer sur le segment $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue (la condition $f \in L^2(I)$ est alors superflue) telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_{[0,1]} f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$.

Par continuité, il suffit de montrer que f est nulle sur $]0,1[$. On suppose qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) \neq 0$, par exemple $f(x_0) > 0$. Par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour tout $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, $f(x) \geq \eta$.

On pose $P(x) := \left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2}-x\right)$. Il est facile de constater que P est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$, $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$, $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = P\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$ et $P\left(\dfrac{1}{2}+x\right) = P\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$ pour tout $x \in [-1,1]$.

On pose $Q(x) := \dfrac{P(x)}{P(1/2+\varepsilon)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Q_n(x) := Q\left(x+\dfrac{1}{2}-x_0\right)^n$. On note que Q_n est bien définie sur l'intervalle $[0,1]$.

On remarque que Q_n vérifie $Q_n(x_0-\varepsilon) = Q_n(x_0+\varepsilon) = 1$, pour tout $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $Q_n(x) > 1$ et pour tout $x \in [0,1] \setminus [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, $0 \leq Q_n(x) < 1$. On a de plus

$$\forall x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[, \quad \lim_{n\to+\infty} Q_n(x) = +\infty$$

et

$$\forall x \in [0,1] \setminus [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon], \quad \lim_{n\to+\infty} Q_n(x) = 0.$$

Le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]\setminus[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]} f(x)Q_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

et un simple calcul donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]} f(x)Q_n(x)\mathrm{d}x = +\infty.$$

Cela contredit le fait que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_{[0,1]} f(x)Q_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

□