Chapitre 3 : Déterminants

Table des matières

1 Déterminant d'une matrice carrée **2**
- 1.1 Généralités . . . 2
- 1.2 Propriétés du déterminant . . . 4
- 1.3 Déterminant de la transposée . . . 5
- 1.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne . . . 5

2 Déterminant d'une famille de vecteurs **7**

3 Déterminant d'un endomorphisme **8**

4 Compléments **9**
- 4.1 Déterminant de Vandermonde . . . 9
- 4.2 Matrices semblables dans **C** et dans **R** . . . 10
- 4.3 Une inégalité utile . . . 11

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On fixe un entier naturel n non nul.

1 Déterminant d'une matrice carrée

1.1 Généralités

Théorème 1. *Existence et unicité du déterminant.*
Il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ *telle que :*

(i) $\det$ *est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes ;*

(ii) *la permutation de deux colonnes multiplie le déterminant par* -1 *;*

(iii) *le déterminant de la matrice* I_n *vaut* 1.

Démonstration. Nous allons faire la preuve lorsque $n = 2$ et $n = 3$, le cas où $n \geq 4$ n'étant pas au programme.

1. Preuve pour $n = 2$.
   On procède par analyse/synthèse.

Analyse. Supposons qu'une application f vérifiant les points (i), (ii) et (iii) du théorème existe. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$. En utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, on a :

$$f(M) = af\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + cf\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}.$$

En utilisant deux fois la linéarité par rapport à la seconde colonne, on a

$$f(M) = a\left(bf\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + df\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + c\left(bf\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + df\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Or, en permutant les deux colonnes $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. De même, $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

En permutant les deux colonnes et en se servant du fait que $f(\mathrm{I}_2) = 1$, on a $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -f(\mathrm{I}_2) = -1$. Il s'ensuit que

$$f(M) = ad - bc.$$

Synthèse. Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ définie par

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K}), \quad f(M) = ad - bc.$$

On vérifie facilement que f vérifie les points (i), (ii) et (iii) du théorème.

2. Preuve pour $n = 3$.
   On procède encore par analyse/synthèse.

Analyse. Supposons qu'une application f vérifiant les points (i), (ii) et (iii) du théorème existe. On pose $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{K})$.
f est linéaire par rapport à la première colonne, donc

$$f\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}f\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{2,1}f\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 1 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{3,1}f\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 1 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

De plus, f est linéaire par rapport à la deuxième colonne

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix}1 & a_{1,2} & a_{1,3}\\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3}\\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} &= a_{1,2}f\begin{pmatrix}1 & 1 & a_{1,3}\\ 0 & 0 & a_{2,3}\\ 0 & 0 & a_{3,3}\end{pmatrix} + a_{2,2}f\begin{pmatrix}1 & 0 & a_{1,3}\\ 0 & 1 & a_{2,3}\\ 0 & 0 & a_{3,3}\end{pmatrix} + a_{3,2}f\begin{pmatrix}1 & 0 & a_{1,3}\\ 0 & 0 & a_{2,3}\\ 0 & 1 & a_{3,3}\end{pmatrix}\\ &= a_{2,2}f\begin{pmatrix}1 & 0 & a_{1,3}\\ 0 & 1 & a_{2,3}\\ 0 & 0 & a_{3,3}\end{pmatrix} + a_{3,2}f\begin{pmatrix}1 & 0 & a_{1,3}\\ 0 & 0 & a_{2,3}\\ 0 & 1 & a_{3,3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

car, en permutant les deux premières colonnes, on a

$$f\begin{pmatrix}1 & 1 & a_{1,3}\\ 0 & 0 & a_{2,3}\\ 0 & 0 & a_{3,3}\end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix}1 & 1 & a_{1,3}\\ 0 & 0 & a_{2,3}\\ 0 & 0 & a_{3,3}\end{pmatrix} \iff f\begin{pmatrix}1 & 1 & a_{1,3}\\ 0 & 0 & a_{2,3}\\ 0 & 0 & a_{3,3}\end{pmatrix} = 0.$$

Par linéarité de f par rapport à la troisième colonne, on a

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix}1 & 0 & a_{1,3}\\ 0 & 1 & a_{2,3}\\ 0 & 0 & a_{3,3}\end{pmatrix} &= a_{1,3}f\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + a_{2,3}f\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + a_{3,3}f\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= a_{3,3}f(\mathrm{I}_3)\\ &= a_{3,3}\end{aligned}$$

car en permutant la première et la troisième colonne, on a $f\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, donc $f\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 0$. De même, en permutant la deuxième et la troisième colonne, on a $f\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, soit $f\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 0$.

On montre de même que $f\begin{pmatrix}1 & 0 & a_{1,3}\\ 0 & 1 & a_{2,3}\\ 0 & 0 & a_{3,3}\end{pmatrix} = -a_{2,3}$.

Il s'ensuit que

$$f\begin{pmatrix}1 & a_{1,2} & a_{1,3}\\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3}\\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}.$$

On montre de même que

$$f\begin{pmatrix}0 & a_{1,2} & a_{1,3}\\ 1 & a_{2,2} & a_{2,3}\\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} = a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,2}a_{3,3}$$

et

$$f\begin{pmatrix}0 & a_{1,2} & a_{1,3}\\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3}\\ 1 & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} = a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}.$$

En insérant ces trois résultats dans la ligne (1), on obtient

$$f(M) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.$$

Synthèse. Soit $f : \mathscr{M}_3(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ définie par : pour tout $M = \begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{K})$,

$$f(M) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.$$

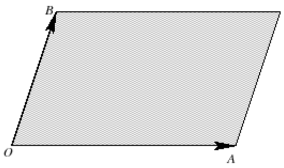
On vérifie « facilement » (c'est pénible !) que f vérifie les points (i), (ii) et (iii) du théorème.

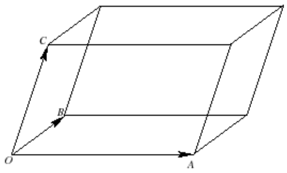
□

Remarque 1. (i) Lorsque $n \in \{2, 3\}$, on retrouve la notion vue en TSI 1.

(ii) Si $n = 2$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, le déterminant de la matrice dont on note (u, v) les colonnes est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur u et v.

(iii) Si $n = 3$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, le déterminant de la matrice dont on note (u, v, w) les colonnes est le volume algébrique du parallépipède construit sur u, v et w.





1.2 Propriétés du déterminant

Proposition 1. *Déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ayant deux colonnes égales. Alors, $\det(A) = 0$.

Démonstration. On suppose que les colonnes C_i et C_j sont égales. Par définition du déterminnant, lorsque l'on permute les colonnes C_i et C_j le déterminant est multiplié par -1, ainsi $\det(A) = -\det(A)$, soit $\det(A) = 0$. □

Proposition 2. *Expression de* $\det(\lambda A)$*,* $\lambda \in \mathbf{K}$.
Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

⚠Attention à la puissance n !

Remarque 2. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $\lambda > 0$, en utilisant l'interprétation géométrique du déterminant, ce résultat permet de retrouver le fait que l'aire (resp. le volume) est multipliée par λ^2 (resp. λ^3) lorsque les distances sont multipliées par λ.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la linéarité du déterminant **par rapport à chacune de ses variables**. □

Proposition 3. *Déterminant et opérations élémentaires sur les colonnes.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

(i) *Multiplier une colonne par $\lambda \in \mathbf{K}$ multiplie le déterminant par λ.*

(ii) *Ajouter à une colonne de A un multiple des autres colonnes ne change pas le déterminant.*

Remarque 3. En particulier, une matrice ayant une colonne nulle a un déterminant nul car linéarité par rapport à cette colonne, on a

$$\det(C_1, \ldots, 0, \ldots, C_n) = 0 \times \det(C_1, \ldots, 0, \ldots, C_n) = 0.$$

Démonstration. (i) Cela résulte de (i) du théorème 1.

(ii) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Par linéarité par rapport à la i-ème colonne, on a :

$$\det(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_j, \ldots, C_n).$$

Or, d'après la proposition 1, on a $\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = 0$, d'où

$$\det(A) = \det(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_j, \ldots, C_n).$$

□

Proposition 4. *Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du déterminant.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. On traite séparemment les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons A inversible. L'algorithme du pivot de Gauss assure que, en faisant uniquement des opérations du type $C_i \longrightarrow C_i + \lambda C_j$ ($\lambda \in \mathbf{K}$) et $C_i \longrightarrow \lambda C_i$ ($\lambda \in \mathbf{K}^\star$), on peut se ramener, en un nombre fini d'étapes à la matrice I_n.

Or, d'après la proposition 3 ces opérations multiplient le déterminant par un nombre **non nul**.

Ainsi, à l'issu de ces opérations, il existe $\lambda \in \mathbf{K}^\star$ tel que $\lambda \det(A) = \det(\mathrm{I}_n) = 1$. Ainsi, $\det(A) \neq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On raisonne par contraposée et on suppose que A n'est pas inversible. Le rang de A, qui est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A, est donc strictement inférieur à n, ainsi une colonne est combinaison linéaire des autres : par exemple, on peut écrire $C_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \lambda_i C_i$.

En faisant les opérations $C_k \longleftarrow C_k - \lambda_i C_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}$, on obtient

$$\det(A) = \det(C_1, \ldots, 0, \ldots, C_n) = 0$$

d'après la remarque 3.

□

Proposition 5. *Déterminant d'un produit de matrices.*
Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$, *on a* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. Admis.

□

Corollaire 1. *Déterminant de l'inverse d'une matrice.*
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. *Alors,* $\det(A)$ *est non nul et* $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$.

Démonstration. On a $A \times A^{-1} = \mathrm{I}_n$. Par la proposition 5 et par définition, on a

$$1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det\left(A \times A^{-1}\right) = \det(A)\det(A)^{-1}.$$

On en déduit que $\det(A) \neq 0$ et $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$.

□

1.3 Déterminant de la transposée

Proposition 6. *Déterminant de la transposée.*
Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, *on a* $\det(A) = \det\left(A^\top\right)$.

Démonstration. Admis.

□

Remarque 4. Ainsi, tous les résultats (qui précédent ou qui suivront) qui portent sur les colonnes des matrices, se généralisent aux lignes de la matrice.

1.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème 2. *Développement par rapport à une colonne.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. *Soit* $i \in [\![1, n]\!]$, $n \geq 2$. *On a*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ *est la matrice obtenue à partir de* A *en retirant la ligne* i *et la colonne* j.

Remarque 5. D'après la remarque 4, on peut aussi développer par rapport à une ligne.

Démonstration. En utilisant la linéarité par rapport à la colonne j, on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En appliquant successivement les opérations $L_i \longleftrightarrow L_{i-1}, L_{i-1} \longleftrightarrow L_{i-2}, \dots, L_2 \longleftrightarrow L_1$ qui multiplient le déterminant par -1, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En appliquant successivement les opérations $C_j \longleftrightarrow C_{j-1}, C_{j-1} \longleftrightarrow C_{j-2}, \dots, C_2 \longleftrightarrow C_1$ qui multiplient le déterminant par -1, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Les opérations $C_i \longleftarrow C_i - a_{i,1} C_1$ (pour $i \in [\![2, n]\!]$) donnent

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On peut maintenant montrer que l'application φ définie sur $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ par

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow \mathbf{K} \\ B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2} & \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \end{cases}$$

vérifie les points (i), (ii) et (iii) du théorème 1. Ainsi, φ est le déterminant sur $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$. Ainsi,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

□

Exemple 1. En développant par rapport à la première colonne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 1 = 1.$$

Exemple 2. En développant par rapport à la deuxième ligne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 1 + 1 \times 3 - 0 \times (-2) = 1.$$

Remarque 6. Pour se souvenir où placer les signes $+$ et $-$, on peut se souvenir de la matrice des signes suivante

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \pm \\ - & + & - & \ddots & \mp \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mp & \pm & \ddots & \ddots & - \\ \pm & \mp & \cdots & \ddots & + \end{pmatrix}.$$

Proposition 7. *Déterminant d'une matrice triangulaire.*
Le déterminant d'une matrice carrée triangulaire est le produit des éléments sur la diagonale.

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 2$, cela découle de la formule établie pour le déterminant lors de la preuve su théorème 1.

On suppose que pour toute matrice triangulaire carrée d'ordre n, le déterminant est le produit des éléments sur la diagonale.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire. En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n+1} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}.$$

L'hypothèse de récurrence assure alors que $\det(A) = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n+1,n+1}$, ce qui termine la récurrence.

□

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Dans cette sous-partie, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$.

Définition 1. *Déterminant d'une famille de vecteurs par rapport à une base.*
Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E. Le déterminant de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ par rapport à la base $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$, est le déterminant de la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$.

Exemple 3. Calculer le déterminant de la famille $\mathscr{C} = \left(1, X-1, (X-1)^2\right)$ de $\mathbf{K}_2[X]$ par rapport à la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbf{K}_2[X]$.

Solution. Déjà, $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\left(1, X-1, (X-1)^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice étant triangulaire, on en déduit que $\det_{\mathscr{B}}\left(1, X-1, (X-1)^2\right) = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

Proposition 8. *Caractérisation des bases.*
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de E. $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E si, et seulement si, la matrice $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$ est inversible et utiliser la proposition 4. □

Exemple 4. Trouver la/les valeurs de $a \in \mathbf{K}$ pour que la famille $\mathscr{C} = ((a, 0, a), (0, 1, a), (1, 1, 1))$ soit une base de $\mathbf{K}^3$.

Solution. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{K}^3$. D'après la proposition 8, $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{K}^3$ si, et seulement si, $\det(\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})) \neq 0$. Or,

$$\det(\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})) = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on a

$$\det(\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})) = a \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + a \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a \times (1-a) + a \times (-1) = -a^2.$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{K}^3$ si, et seulement si, $a \neq 0$.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Dans cette sous-partie, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$.

Proposition 9. *Déterminant de deux matrices semblables.*
Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ semblables. Alors $\det(A) = \det(B)$.

Démonstration. Comme A et B sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Ainsi, en utilisant la proposition 5 et le corollaire 1, on a

$$\det(A) = \det(P)\det(B)\det\left(P^{-1}\right) = \det(P)\det(B)\det(P)^{-1} = \det(B).$$

□

⚠La réciproque de la proposition (9) est fausse : les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont toutes les deux un déterminant nul, mais ne sont pas semblables car elles n'ont pas le même rang.

Définition 2. *Déterminant d'un endomorphisme.*
D'après la proposition 9, le déterminant de matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie. On définit le ***déterminant****, noté* $\det(u)$*, cette quantité commune.*

Exemple 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbf{K}))$ défini par

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K}), \quad u(M) = AM - MA.$$

Calculer $\det(u)$.

Solution. La famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$. De simples calculs donnent :

$$u\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & 0\end{pmatrix},\ u\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ u\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix} \text{ et } u\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\-2 & 0 & 0 & 2\\-1 & 0 & 0 & 1\\0 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

On remarque que $C_3 = 2C_2$, donc d'après la proposition 1, on a $\det(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \det(u) = 0$.

Proposition 10. *Propriétés du déterminant d'un endomorphisme.*
Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On a :

(i) $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$;

(ii) $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$;

(iii) $\det(u) \neq 0$ *si, et seulement si, u est un automorphisme et on a alors* $\det\left(u^{-1}\right) = \det(u)^{-1}$.

Démonstration. Ce sont les traductions « endomorphiques » des propositions 5, 2 et 4.

□

4 Compléments

4.1 Déterminant de Vandermonde

Définition 3. *Matrice de Vandermonde.*
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbf{K}$. On définit la ***matrice de Vandermonde*** *des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, notée $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, par*

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Proposition 11. *Déterminant d'une matrice de Vandermonde.*
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$. On a

$$\det(V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Démonstration. Soit P définie par $P(\lambda) = \det(V(\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)) = \begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}$.

En développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on remarque que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ dont le coefficient devant λ^{n-1} est $\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix} = \det(V(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}))$.

De plus, $P(\lambda_2) = \cdots = P(\lambda_{n-1}) = 0$ car, pour chacune de ces valeurs, la matrice comporte deux colonnes égales, donc d'après la proposition 1, le déteminant est nul.

$\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des racines de P. Comme P est de degré au plus $n-1$, on peut écrire

$$P(\lambda) = \det(V(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)) \prod_{i=2}^{n} (\lambda - \lambda_i).$$

En évaluant cette relation en λ_1, on obtient

$$P(\lambda_1) = \det(V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \det(V(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)) \prod_{i=2}^{n} (\lambda_1 - \lambda_i). \tag{2}$$

On peut alors prouver le résultat par récurrence.

Pour $n = 1$, le résultat est clair.

Supposons le résultat vrai pour toute matrice de Vandermonde d'ordre $n-1$. Soit $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ une matrice de Vandermonde d'ordre n.

En utilisant (2) et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\det(V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\lambda_j - \lambda_i) \times \prod_{i=2}^{n} (\lambda_1 - \lambda_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

□

Corollaire 2. *Soit* $(\lambda_1, \ldots, \lambda) \in \mathbf{K}^n$*. La matrice* $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *est inversible si, et seulement si, les éléments* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont deux à deux distincts.*

Démonstration. En utilisant la proposition 3 est inversible si, et seulement si, $\det(V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$ est non nul. Or, d'après la proposition 11,

$$\det(V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

et ce déterminant est non nul si, et seulement si, les éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts.

□

4.2 Matrices semblables dans C et dans R

Définition 4. *Matrices semblables.*

Soient A, B *deux matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$*. On dit que* A *et* B *sont semblables dans* $\mathbf{K}$*, s'il existe* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ *telle que* $A = PBP^{-1}$*.*

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathbf{C}$, i.e. il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Peut-on trouver une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$? La réponse est oui, mais la méthode est moins évidente qu'elle n'y paraît.

Plus formellement, voici la proposition que nous nous proposons d'établir.

Proposition 12. *Soient* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$*. On suppose que* A *et* B *sont semblables dans* $\mathbf{C}$*, alors elles sont semblables dans* $\mathbf{R}$*.*

Démonstration. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On écrit $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ où P_1, P_2 sont respectivement les parties réelles et imaginaires de P. On a

$$A = PBP^{-1} \iff AP = PB \iff A(P_1 + \mathrm{i}P_2) = (P_1 + \mathrm{i}P_2)B \iff \begin{cases} AP_1 & = P_1 B \\ AP_2 & = P_2 B \end{cases}. \tag{3}$$

Soit $f : \lambda \in \mathbf{C} \longmapsto \det(P_1 + \lambda P_2)$. En développant le déterminant, f est une fonction polynomiale à coefficients réels.

Or, $f(\mathrm{i}) = \det(P) \neq 0$, donc f n'est pas la fonction polynomiale nulle. En particulier, f n'est pas identiquement nulle sur $\mathbf{R}$ (sinon f aurait une infinité de racines et serait la fonction polynomiale nulle) :

il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(t_0) = \det(P_1 + t_0 P_2) \neq 0$. On pose $Q = P_1 + t_0 Q_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. En utilisant la ligne (3), on a

$$A(P_1 + t_0 P_2) = (P_1 + t_0 P_2) B$$

soit

$$AQ = QB \iff A = QBQ^{-1}.$$

Les matrices A et B sont semblables dans $\mathbf{R}$.

□

4.3 Une inégalité utile

Proposition 13. *Une inégalité sur les déterminants.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On a

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

Démonstration. On commence par traiter un cas particulier. Soit, pour $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\mathscr{P}_n : « \, \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \quad \left(\forall j \in [\![1,n]\!], \ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leq 1 \right) \Longrightarrow |\det(A)| \leq 1 \, ».$$

$\mathscr{P}_1$ est clairement vraie. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain naturel non nul n.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{K})$ telle que pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} |a_{i,j}| \leq 1$.

En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$|\det(A)| = \left| \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{i,1}| \, |\det(A_{i,1})|.$$

Or, chaque matrice $A_{i,1}$ ($i \in [\![1,n]\!]$) vérifie l'hypothèse de récurrence. Ainsi,

$$|\det(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{i,1}| \leq 1,$$

ceci termine la récurrence.

On peut maintenant terminer la preuve du résultat. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dont on note $(C_1, \ldots, C_n)$ les colonnes. On pose

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Si l'un des colonnes est nulle, d'après la remarque 3, $\det(A) = 0$ et l'inégalité est claire. On suppose donc que toutes les colonnes de A sont non nulles, ainsi $\alpha_j > 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Soit $M = \left(\alpha_1^{-1} C_1 | \cdots | \alpha_n^{-1} C_n\right)$.

Par construction, la somme de la valeur absolue des éléments de chaque colonne de M est inférieure ou égale à 1, donc d'après la récurrence ci-dessus, on a $|\det(M)| \leq 1$.

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses variables, on a

$$\det(M) = \alpha_1^{-1} \cdots \alpha_n^{-1} \det(A).$$

On en déduit finalement que

$$|\det(A)| = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) |\det(M)| \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

□