Chapitre 3 : Exercices

Exercice 1.

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 & -1 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}.$$

Exercice 3.

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$. Calculer et factoriser le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 4.

Pour quelle valeur de $a \in \mathbf{K}$, les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$M_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a^2-1 \\ 1 & a-1 & 2a-1 & a^2-a \\ 0 & a & a & 0 \\ 1 & a & 3a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et soit Δ_n défini par

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
3. Calculer Δ_4 et Δ_5. Conjecturer une expression pour Δ_n.
4. Démontrer cette conjecture.

Exercice 6.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice antisymétrique. Montrer que si n est impair, alors A n'est pas inversible. Le résultat est-il toujours vrai lorsque n est pair ?

Exercice 7.

Trouver les éléments $t \in \mathbf{K}$ tels que la famille $((t,1,1),(1,t,1),(1,1,t))$ soit une base de $\mathbf{K}^3$.

Exercice 8.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c) \in \mathbf{K}^3$ pour que la famille $\left((X-a)^2,(X-b)^2,(X-c)^2\right)$ soit une base de $\mathbf{K}_2[X]$.

Exercice 9.

Calculer le déterminant de $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{K}^3\right)$ et préciser si u est un automorphisme :

1. $u(x,y,z) = (x+y+z, x+y, x+y)$;
2. $u(x,y,z) = (x-z, y-z, y-z)$.

Exercice 10.

Calculer le déterminant de $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_3[X])$ dans chacun des cas suivants et déterminer si u est un automorphisme :

1. $u(P) = P + P'$;
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$;
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

Exercice 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbf{K}))$ défini par $\varphi(M) = AM$.

1. Écrire la matrice N de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$.
2. Exprimer le déterminant de N en fonction de celui de A. En déduire que φ est un automorphisme si, et seulement si, A est inversible.

Exercice 12.

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$. Montrer que $\dim(E)$ est pair.

Exercice 13.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a toutes ses colonnes nulles sauf la dernière.
2. En déduire que $\det(\mathrm{id}_E + u) = 1 + \mathrm{Tr}(u)$.

Exercice 14.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie.

1. Donner la matrice de s dans une base adaptée à la somme directe $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
2. Exprimer le déterminant de s en fonction de la dimension de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Exercice 15.

1. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ où $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Donner la matrice de l'application $\varphi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longmapsto M^\top$ dans une base adaptée à la somme directe $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.
3. En déduire le déterminant de φ en fonction de la dimension de $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$, puis conclure.