

Formulaires

1 Primitives

1.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitives	Intervalle
$x \mapsto x^n, n \in \mathbf{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}
$x \mapsto x^n, n \in \mathbf{Z}, n \leq -2$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}_+^* ou \mathbf{R}_-^*
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}_+ si $\alpha > -1$, \mathbf{R}_+^* si $\alpha < -1$
$x \mapsto e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbf{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x) + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}_+^*
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x) + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}_-^*
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x \ln(x) - x + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}_+^*
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\cos(x)) + c, c \in \mathbf{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \text{Arctan}(x) + c, c \in \mathbf{R}$	\mathbf{R}
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \text{Arcsin}(x) + c, c \in \mathbf{R}$	$] -1, 1[$
$x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \text{Arccos}(x) + c, c \in \mathbf{R}$	$] -1, 1[$

1.2 Primitives de fonctions composées

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de \mathbf{R} et $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie et dérivable sur I . Soit $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur l'intervalle J tel que $u(I) \subset J$. On note F une primitive de f sur J .

Fonction	Primitives	Intervalle
$x \mapsto u'(x) u^n(x), n \in \mathbf{N}$	$x \mapsto \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c, c \in \mathbf{R}$	I
$x \mapsto u'(x) u^n(x), n \in \mathbf{Z}, n \leq -2$	$x \mapsto \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c, c \in \mathbf{R}$	I et u ne s'annule pas sur I
$x \mapsto u'(x) u^\alpha(x), \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$	$x \mapsto \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, c \in \mathbf{R}$	I et u à valeurs strictement positives sur I
$x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$	$x \mapsto e^{u(x)} + c, c \in \mathbf{R}$	I
$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln(u(x)) + c, c \in \mathbf{R}$	I et u ne s'annule pas sur I
$x \mapsto f(u(x)) u'(x)$	$x \mapsto F(u(x)) + c, c \in \mathbf{R}$	I

2 Formules de trigonométrie

2.1 Addition d'un tour

- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$;
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$;
- $\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$.

2.2 Addition d'un demi-tour

- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$;
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$;
- $\tan(x + \pi) = \tan(x)$.

2.3 Angle opposé

- $\cos(-x) = \cos(x)$;
- $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- $\tan(-x) = -\tan(x)$.

2.4 Formule de l'angle double

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$;
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$;
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$.

2.5 Addition d'un quart de tour

- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$;
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$;

2.6 Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
- $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
- $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

2.7 Formules de linéarisation

1. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$;
2. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$;
3. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

2.8 Formules de factorisation

1. $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
2. $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
3. $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
4. $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$;

3 Équivalents et développements limités**3.1 Équivalents usuels**

On a les équivalents usuels suivants.

1. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$;
2. $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
3. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
4. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
5. $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
6. $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
7. $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$;
8. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ ($\alpha \in \mathbf{R}^*$).

3.2 Développements limités usuels

On a les développements limités suivants ($n \in \mathbf{N}$).

1. $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$;
2. $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$;
3. $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
4. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
5. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
6. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$;
7. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;
8. $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$;
9. $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$.

4 Développements en série entière usuel

Développement en série entière	Rayon de convergence	Intervalle ouvert de convergence
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1[$
$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	\mathbf{R}
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	\mathbf{R}
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	\mathbf{R}
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) \frac{x^n}{n!}, \alpha \in \mathbf{R}$	1	$] -1, 1[$