Chapitre 5 : Exercices

Exercice 1.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et telle que $f(0) = 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 2.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ et telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Exercice 3.

Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$.

Dans la suite, on suppose que, g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

2. Justifier que, pour tout $x \in]a,b[$, $g(a) \neq g(x)$.
3. Montrer que si $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite finie ℓ en a, alors $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ admet la même limite en a.

Exercice 4.

Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

Exercice 5.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}_+^\star$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. En utilisant la fonction $g = \ln(f)$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\dfrac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right)$.

Exercice 6.

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1 + \sin(x)} - \cos(x)$.

Exercice 7.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 2 de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.

Exercice 8.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x^2)$.

Exercice 9.

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \sin\left(\ln(1+x)\right) - \ln\left(\sin(x) + 1\right)$. En déduire un équivalent simple de f en 0.

Exercice 10.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$.

Exercice 11.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ en 0 de Arcsin.

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbf{N}$, la valeur de $\text{Arcsin}^{(N)}(0)$.

Exercice 12.

1. Déterminer un équivalent simple de $x \longmapsto x^{1/x} - 1$ en $+\infty$.
2. En déduire un équivalent simple de $x \longmapsto x^{x^{1/x}} - x$ en $+\infty$.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \longmapsto \dfrac{\left((1+x)^{1/x} - x^{1/x}\right) \times \left(x \times \ln(x)\right)^2}{x^{x^{1/x}} - x}$.

Exercice 13.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation $\tan(x) = x$ possède une unique solution dans l'intervalle $I_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$. On notera x_n cette solution.
2. Déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
3. Montrer que $x_n - \dfrac{\pi}{2} - n\pi \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n\pi}$.

Exercice 14.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ qui décrit le déplacement d'un point du point. On suppose que f' et f'' ne s'annulent pas sur I.

1. Montrer que le point se déplace à vitesse constante si et seulement si, le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse sont orthogonaux.
2. Montrer que le point accélère si, et seulement si, l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[-\pi/2, \pi/2]$.
3. Montrer que le point décélère si, et seulement si, l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Exercice 15.

Soient $u, v, w : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ trois fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 16.

Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On considère f et g deux solutions de l'équation différentielle $y'' = ay' + by$. Montrer que la fonction w définie sur I par $w(t) = \begin{vmatrix} f(t) & f'(t) \\ g(t) & g'(t) \end{vmatrix}$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1.

Exercice 17.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $t \in I$, $f''(t) \in \text{Vect}(f(t))$.

1. Montrer que l'application $t \in I \longrightarrow f(t) \wedge f'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ ne sont pas colinéaires. Montrer que les valeurs prises par $f(t)$ pour $t \in I$ sont contenues dans un plan.
3. On suppose que f ne s'annule pas sur I et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ sont colinéaires. Montrer que f prend ses valeurs dans une droite.

Exercice 18.

Calculer les développements limités à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $f(t) = \left((1-t)^{-1}, (1+t)^{-1}\right)$ en 0 ;
2. $f(t) = \left(\mathrm{e}^t, \cos(t)\right)$ en 0 ;
3. $f(t) = \left(\sin^2(t), \sqrt{1-t^2}\right)$ en 0 ;
4. $f(t) = \left(\ln^2(t), t^t\right)$ en 1 ;
5. $f(t) = \left(\mathrm{e}^{\sin(\pi t)}, t^4\right)$ en 1 ;
6. $f(t) = \left(\mathrm{e}^t \sin(t), \sin^3(t)\right)$ en 0.

Exercice 19.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$.

Exercice 20.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \left(\dfrac{t}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$.

Exercice 21.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ par $f(t) = \left(\dfrac{3t}{1+t^3}, \dfrac{3t^2}{1+t^3}\right)$.

Exercice 22.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (\cos(3t), \sin(2t))$.

Exercice 23.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (2\cos(2t), \sin(3t))$.

Exercice 24.

Tracer la courbe paramétrée par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$.

Exercice 25.

Soit l'arc paramétré par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \left((t-2)^3, t^2-4\right)$.

1. Déterminer les points d'infléxion à la courbe.
2. Pour chacun de ses points, donner une équation de la tangente à la courbe.

Exercice 26.

Soit l'arc paramétré par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \left(\mathrm{e}^t, t^2\right)$.

1. Déterminer les points d'infléxion à la courbe.
2. Pour chacun de ses points, donner une équation de la tangente à la courbe.

Exercice 27.

Calculer la longueur de la courbe paramétrée par la fonction $f : [0, 10\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

Exercice 28.

Soit la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $h(t) = \mathrm{e}^t$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h.

Exercice 29.

Soit la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $h(t) = t^{3/2}$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h.

Exercice 30.

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$.

1. Quelle transformation géométrique simple envoie le point $f(t)$ sur le point $f(t+2\pi)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
2. Tracer la courbe paramétrée par f.
3. Calculer la longueur de la courbe entre les points $f(0)$ et $f(2\pi)$.

Exercice 31.

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) + \sin(2t))$.

1. Tracer la courbe paramétrée par f.
2. Calculer la longueur de la courbe.