Chapitre 4 : Exercices

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes en primitivant.

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x\,;$
2. $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{14}{(4-x)^3}\mathrm{d}x\,;$
3. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^2 \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x\,;$
4. $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}^3}^{1/\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x\,;$
5. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^2}\mathrm{d}x\,;$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x\,;$
7. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+4x}}\mathrm{d}x\,;$
8. $\displaystyle\int_1^{1/\ln(2)} 2^x\mathrm{d}x\,;$
9. $\displaystyle\int_2^1 x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\,;$
10. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^3 \frac{4x}{x^2+1}\mathrm{d}x\,;$
11. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2(x)}{x}\mathrm{d}x\,;$
12. $\displaystyle\int_0^1 3\,\mathrm{e}^{-x/2+1}\,\mathrm{d}x\,;$
13. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x\,;$
14. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln^2(x)}\mathrm{d}x\,;$
15. $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} \frac{x^2}{1-x^3}\mathrm{d}x\,;$
16. $\displaystyle\int_0^3 (5^x-x+4)\,\mathrm{d}x\,;$
17. $\displaystyle\int_0^1 (x-1)\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)\mathrm{d}x.$

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes en faisant une intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,;$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x\,;$
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x\,;$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\,;$
5. $\displaystyle\int_0^2 (2-x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,;$
6. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,;$
7. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^3}\mathrm{d}x\,;$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

Exercice 3.

Pour $p,q\in\mathbf{N}$ et pour $a<b$, on définit $I_{p,q}=\displaystyle\int_a^b (t-a)^p\,(b-t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $I_{0,q}$.
2. Montrer que pour tout $p\geq 1$ et tout $q\in\mathbf{N}$, on a
$$I_{p,q}=\frac{p}{q+1}I_{p-1,q+1}.$$
3. En déduire la valeur de $I_{p,q}$ dans le cas général.

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivantes en procédant aux changements de variable indiqués.

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(2x+1)\,\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$ (on posera $u=\mathrm{e}^x$) ;
3. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (on posera $u=\sqrt{x}$) ;
4. $\displaystyle\int_4^9 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (on posera $u=\sqrt{x}$) ;
5. $\displaystyle\int_{\ln(3)}^{\ln(15)} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$ (on posera $u=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}$ et on montrera que pour tout $u\in[2,4]$, $\dfrac{1}{u^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u+1}-\dfrac{1}{u-1}\right)$) ;
6. $\displaystyle\int_8^{27} \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ (on posera $u=\sqrt[3]{x}$).

Exercice 5.

Les limites suivantes existent-elles ? Les calculer le cas échéant.

1. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to0} x^2+\frac{\sqrt{x}}{x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2-1}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin(x)}{\sin(3x)}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)}{x}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$;
9. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+x^2\right)-x$;
11. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\mathrm{e}^{1/x^2}}{x^2+1}$;
12. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$;
13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\cos(x)$;
14. $\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 6.

Donner un équivalent simple des expressions suivantes en les points indiqués.

1. $\dfrac{x^3-1}{2x^2+1}$ en $+\infty$;
2. $\dfrac{x^4+3x}{x^5-3x+1}$ en 0 ;
3. $\dfrac{1-\cos(x)}{x(2-x)\tan(2x)}$ en 0 ;
4. $\dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\sin(x)}{x^2+x^3}$ en 0 ;
5. $\tan(x)\tan(2x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$;
6. $\dfrac{\ln(\cos(x))}{\ln(\cos(2x))}$ en 0 ;
7. $\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ en 0 ;
8. $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}$ en 0 ;
9. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{4x}}{x}$ en 0 ;
10. $\dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1}{x}$ en 0 ;
11. $\dfrac{5^x-2^x}{x}$ en 0 ;
12. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$;
13. $\dfrac{\sin(x)}{\tan(x)}$ en 0 ;
14. $\dfrac{x}{\sin(x^2)+x}$ en 0 ;
15. $\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$ en 0 ;
16. $\dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$ en 0 ;
17. $\dfrac{(1-\cos(x))(\mathrm{e}^x-1)}{x^3+x^2}$ en 0 ;
18. $\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$ en π.

Exercice 7.

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{k^2+n^2}$;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\mathrm{e}^{k/n}}{n}$;
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\sin\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Exercice 8.

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ continues.

1. Calculer la limite de $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) g\left(\dfrac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On suppose en outre g dérivable sur $[0,1]$ et g' continue sur $[0,1]$. On admet qu'il existe un réel $M\geq 0$ tel que pour tout $x\in[0,1]$, $|g'(x)|\leq M$.
   (a) Justifier que l'on peut écrire
   $$\forall (a,b)\in[0,1]^2,\quad g(b)-g(a)=\int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall (a,b)\in[0,1]^2,\quad |g(b)-g(a)|\leq M\,|b-a|\,.$$
   (c) En déduire la limite de $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) g\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

Exercice 9.

Étudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2}$;
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 10.

Soit a un réel strictement positif. Montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leurs valeurs :

$$I=\int_0^{+\infty}\cos(t)\,\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad J=\int_0^{+\infty}\sin(t)\,\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t.$$

Exercice 11.

Étudier la convergence des intégrales ci-dessous :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(t-1)(t+5)}{t^2(t^2+1)}\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$;
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^{3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{3-t}}$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^3+1}\mathrm{d}t$;
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t)\sin\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}\mathrm{d}t$;
9. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}$;
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}\right)^2\mathrm{d}t$;
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$;
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 12.

Prouver la convergence et calculer les intégrales suivantes en procédant aux changement de variable indiqué :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ (poser $u=\sqrt{t}$) ;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$ (poser $u=\mathrm{e}^t$) ;
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$ (poser $t=(1+\sin(x))/2$) ;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$ (poser $u=\mathrm{e}^t$).

Exercice 13.

Pour $a\in\mathbf{R}_+^\star$, on considère

$$I_a=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)} \quad \text{et} \quad J_a=\int_0^{+\infty}\frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les intégrales I_a et J_a sont convergentes.
2. En posant $u=1/t$, montrer que $I_a=J_a$.
3. Calculer I_a+J_a. En déduire la valeur de I_a et J_a.

Exercice 14.

Pour $a\in\mathbf{R}_+^\star$, on considère

$$I_a=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $t\in[1,+\infty[$, $0\le\ln(t)\le\sqrt{t}$.
2. Montrer que l'intégrale I_a converge pour tout $a>0$.
3. En posant $u=1/t$, montrer que $I_1=0$.
4. En posant $t=au$, donner la valeur de I_a pour $a>0$.

Exercice 15.

On a vu en cours que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge. On va montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

1. Justifier que tout $n\in\mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\ge\frac{2}{(n+1)\pi}$.
2. Conclure.

Exercice 16.

Pour $n\in\mathbf{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_0 converge et montrer que $I_0=1$.
2. Soit $A\ge0$. Montrer que
$$\int_0^A t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-A^{n+1}\mathrm{e}^{-A}+(n+1)\int_0^A t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$
3. Montrer par récurrence que I_n converge pour tout $n\in\mathbf{N}$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $I_{n+1}=(n+1)I_n$. En déduire la valeur de I_n.

Exercice 17.

Pour $x\in\mathbf{R}$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Étudier la monotonie de f.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x \in \mathbf{R}_+^\star$.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent simple de f en $+\infty$.
5. Calculer la limite de f en 0^+ et donner un équivalent simple de f en 0^+.

Exercice 18.

Soit la fonction g définie sur $[0,1[$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est bien définie sur $[0,1[$ et continue sur $[0,1[$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et calculer sa dérivée g' puis déterminer ses variations.
3. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que pour tout $t \in [x^2, x]$,
$$\frac{x}{t\ln(t)} \leq \frac{t}{t\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t\ln(t)},$$
puis encadrer $g(x)$.
4. Montrer que g est prolongeable par continuité en 1.
5. Montrer que g' admet une limite à gauche en 1 puis, en utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que g est dérivable en 1 et trouver la valeur de $g'(1)$.

Exercice 19.

En utilisant la méthode de comparaison série/intégrale, donner un équivalent des suites suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$;
4. $\ln(n!)$;
5. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$;
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$;
7. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{k}$;
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

Exercice 20.

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a}{n^2+a^2}$ converge. On note $S(a)$ sa somme.
2. Encadrer $S(a)$ par deux intégrales pour $a > 0$.
3. En déduire la limite de $S(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 21.

1. Discuter suivant la valeur de $x \in \mathbf{R}$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2x^2}$. En cas de convergence, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2x^2}$.
2. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, donner un encadrement de $S(x)$ pour $x > 0$.
Indication : On pourra justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et admettre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. Donner la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Donner un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 22.

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbf{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge-t-elle ? On note $\zeta(x)$ sa somme en cas de convergence.

2. Montrer que ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
3. Montrer que ζ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.
4. Donner un équivalent simple de $\zeta(x) - 1$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Montrer que $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.
6. Donner un équivalent simple de $\zeta(x)$ en 1^+.