Autour du théorème de Cesàro

Erik Thomas *

Résumé

Le but de cet article est de donner un espace de suites intermédiaire entre les suites qui convergent au sens classique et les suites qui convergent au sens de Cesàro.

Pour de telles suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ (appelées suites à densité), nous donnons explicitement la valeur de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ en fonction d'une intégrale par rapport à une mesure construite ci-dessous.

1 Introduction et but de cet article

Avant de d'énoncer le résultat principal de cet article, posons une définition.

Définition 1.1. *Convergence au sens de Cesàro*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite d'éléments de $\mathbf{R}$. On dit que la suite u converge au sens de Cesàro si la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge.

On note $C(\mathbf{R}) := \left\{u\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}^\star},\ \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k\right)_{n\in\mathbf{N}^\star} \text{converge}\right\}$: c'est un espace vectoriel. Dans toute la suite, pour tout $u\in C(\mathbf{R})$, on note $\varphi(u) := \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$. Il est clair que l'application $\varphi : C(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ est une forme linéaire. On dispose alors du très classique résultat suivant :

Théorème 1.1. *Théorème de Cesàro*

Si u est une suite réelle qui converge au sens classique vers ℓ, alors u converge au sens de Cesàro vers ℓ aussi.

Il est classique que le théorème de Cesàro n'admet que des réciproques partielles. Il est alors raisonnable de se demander si l'on peut inclure un espace de suites intermédiaire entre les suites qui convergent au sens classique et les suites qui convergent au sens de Cesàro. C'est le propos de la définition suivante :

Définition 1.2. *Suite à densité*

Soit $u\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}^\star}$. On dit que u est à densité si pour tout $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ avec $a<b$, la limite suivante $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\operatorname{card}\{k\in[\![1,n]\!],\ u_k\in]a,b[\}}{n}$ existe.

On note $D(\mathbf{R})$ l'ensemble des suites réelles à densité.

Remarque 1. Si u est une suite à densité alors, en utilisant les propriétés sur le cardinal, pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\operatorname{card}\{k\in[\![1,n]\!],\ u_k\in I\}}{n}$ existe. Plus généralement, pour tout $B\in\mathscr{A}(\mathbf{R})$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\operatorname{card}\{k\in[\![1,n]\!],\ u_k\in B\}}{n}$ existe où $\mathscr{A}(\mathbf{R})$ désigne l'algèbre des intervalles de $\mathbf{R}$

Avant d'énoncer le résultat principal, nous aurons besoin de la définition suivante.

* erik.thomas@ens-rennes.fr

Définition 1.3. *Soit $u \in D(\mathbf{R})$. On dit que u est évanescente s'il existe un voisinage de $+\infty$, disons $]A,+\infty[$ et un voisinage de $-\infty$, disons $]-\infty, B[$ tels que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{card}\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in]A,+\infty[\}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{card}\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in]-\infty,B[\}}{n} = 0.$$

Remarque 2. Il est facile de constater qu'une suite bornée est évanescente, par contre la réciproque est fausse.

Le but de cet article est de montrer le résultat suivant (en fait, un résultat plus précis sera énoncé à la proposition 3.1) :

Proposition 1.1. *Si $u \in D(\mathbf{R})$ est évanescente, alors u converge au sens de Cesàro.*

Avant de continuer, nous allons établir la proposition suivante qui justifie bien que $D(\mathbf{R})$ est bien un « intermédiaire » entre les suites qui convergent au sens classique et l'ensemble des suites qui convergent au sens de Cesàro.

Proposition 1.2. *Si $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^\star}$ converge au sens classique, alors $u \in D(\mathbf{R})$ et est évanescente.*

Démonstration. Soit u qui converge vers $\ell \in \mathbf{R}$.

- Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.
  - ⋆ Si $\ell \notin]a,b[$, on introduit $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\cap]a,b[= \varnothing$. Comme l'intervalle $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{card}\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in]a,b[\}}{n} = 0.$$

  - ⋆ Si $\ell \in]a,b[$, on introduit $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\subset]a,b[$. Comme l'intervalle $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{card}\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in]a,b[\}}{n} = 1.$$

- Comme u converge, u est donc bornée, puis est évanescente (voir remarque 2).

□

2 Construction d'une mesure

Le but de cette sous-partie est de construire une mesure borélienne naturellement associée à une suite $u \in D(\mathbf{R})$. Pour cela, nous utiliserons la définition suivante.

Définition 2.1. *Soit $u \in D(\mathbf{R})$. Pour tout $B \in \mathscr{A}(\mathbf{R})$, on pose*

$$\mu_u(B) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{card}\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in B\}}{n}.$$

On note aussi, pour $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^\star}$, σ_u l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u. On a la proposition classique suivante.

Proposition 2.1. *Si $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^\star}$, σ_u est fermé.*

Démonstration. C'est immédiat si l'on remarque que $\sigma_u = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^\star} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$.

□

La proposition suivante est fondamentale dans la suite.

Proposition 2.2. *Si $u \in D(\mathbf{R})$, μ_u est une mesure de probabilité σ-finie sur $\mathscr{A}(\mathbf{R})$ supportée dans σ_u. Si l'on suppose de plus que u est évanescente, alors μ_u est à support compact.*

Démonstration.

- Il est clair que $\mu_u(\mathbf{R}) = 1$.

- Soit $(A_i)_{i\in\mathbf{N}^\star}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}(\mathbf{R})$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathscr{A}(\mathbf{R})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a :

$$\frac{1}{n}\mathrm{card}\left\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\mathrm{card}\left\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in A_i\right\}.$$

  Par positivité, le théorème de Beppo Levi assure que

$$\begin{aligned}\mu_u\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\mathrm{card}\left\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right\}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\mathrm{card}\left\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in A_i\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\mathrm{card}\left\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in A_i\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mu_u\left(A_i\right).\end{aligned}$$

  Il s'ensuit que μ_u est une mesure de probabilité sur $\mathscr{A}(\mathbf{R})$.
- Il est clair que μ_u est σ-finie car μ_u est une mesure finie.
- Pour montrer que μ_u est supportée dans σ_u, il suffit de montrer que pour tout $[a,b] \subset \mathbf{R}\backslash\sigma_u$, $\mu_u([a,b]) = 0$. On remarque que l'ensemble $\{k \in \mathbf{N}^\star,\ u_k \in [a,b]\}$ est fini car sinon la suite u aurait une valeur d'adhérence dans $[a,b]$, ce qui est exclu par choix. Par définition de μ_u, on a donc $\mu_u([a,b]) = 0$.
- Si l'on suppose que u est évanescente, par définition, il existe deux réels A et B tels que $\mu_u(]-\infty,B[) = \mu_u(]A,+\infty[) = 0$. Donc μ_u est supportée dans $\sigma_u \cap [B,A]$ qui est un compact (car σ_u est fermé d'après la proposition 2.1).

□

Pour terminer la construction d'une mesure borélienne à partir de μ_u, on utilise le théorème de prolongement de Hahn-Carathédory (voir [2]) qui permet de prolonger de manière unique la mesure μ_u (on notera encore μ_u la mesure ainsi prolongée) aux boréliens de $\mathbf{R}$.

3 Résultat principal et une généralisation

3.1 Preuve du résultat principal

Le but de cette partie est de prouver la proposition 1.1. En fait, nous allons prouver la proposition suivante qui précise la proposition 1.1.

Proposition 3.1. *Pour tout $u \in D(\mathbf{R})$ évanescente, u converge au sens de Cesàro, la fonction $x \mapsto x$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ pour la mesure μ_u et on a :*

$$\varphi(u) = \int_{\mathbf{R}} x\,\mathrm{d}\mu_u(x). \tag{1}$$

Remarque 3. Comme on le fera à la proposition 3.4, le fait d'avoir une description intégrale de $\varphi(u)$ est important.

Nous prouvons la proposition 3.1.

Démonstration.
- Comme u est évanescente, d'après la proposition 2.2, μ_u est supportée dans un compact, donc la fonction $x \mapsto x$ est intégrable (au sens de Lebesgue) par rapport à la mesure μ_u.

- On commence par supposer que u prend des valeurs positives. On pose :

$$\varphi(u)^+ := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad \varphi(u)^- := \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k.$$

Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on pose $J_m := \left]a^{m+1}, a^m\right]$ de sorte que $\mathbf{R}_+^\star = \bigcup_{m\in\mathbf{Z}} J_m$.

  ⋆ Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on écrit :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \Bigg(\frac{1}{n}\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ u_k\in J_m}} u_k\Bigg) \leq \sum_{m\in\mathbf{Z}} a^m \times \frac{\operatorname{card}\{k\in[\![1,n]\!],\ u_k\in J_m\}}{n}.$$

En passant à la limite supérieure et utilisant le théorème de Beppo Levi, on en déduit :

$$\varphi(u)^+ \leq \sum_{m\in\mathbf{Z}} a^m \mu_u(J_m). \tag{2}$$

On montre de même que :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a^{m+1}\mu_u(J_m) \leq \varphi(u)^-. \tag{3}$$

On peut aussi écrire :

$$\int_{\mathbf{R}} x\,\mathrm{d}\mu_u(x) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\left(\int_{J_m} x\,\mathrm{d}\mu_u(x)\right) \leq \sum_{m\in\mathbf{Z}} a^m\mu_u(J_m). \tag{4}$$

On montre de même que :

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} a^{m+1}\mu_u(J_m) \leq \int_{\mathbf{R}} x\,\mathrm{d}\mu_u(x). \tag{5}$$

En combinant les lignes (2), (3), (4) et (5), on récupère :

$$a\int_{\mathbf{R}} x\,\mathrm{d}\mu_u(x) \leq \varphi(u)^- \leq \varphi(u)^+ \leq \frac{1}{a}\int_{\mathbf{R}} x\,\mathrm{d}\mu_u(x). \tag{6}$$

On fait tendre a vers 1 dans la ligne (6), pour obtenir $\varphi(u)^+ = \varphi(u)^- = \int_{\mathbf{R}} x\,\mathrm{d}\mu_u(x)$.

- On ne suppose plus que u prend des valeurs positives. Pour $m \in \mathbf{Z}$, on introduit $J'_m := -J_m = [-a^m, -a^{m+1}[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on écrit alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ u_k\in J_m}} u_k\Bigg) + \sum_{m\in\mathbf{Z}}\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ u_k\in J'_m}} u_k\Bigg).$$

On définit alors μ_u^+ (resp. μ_u^-) la mesure définie par : pour tout borélien B, $\mu_u^+(B) := \mu_u(B\cap\mathbf{R}_+^\star)$ (resp. $\mu_u^+(B) := \mu_u(B\cap\mathbf{R}_-^\star)$). On notera que ce ne sont pas, *a priori* des mesures de probabilité. On montre, comme au point précédent que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ u_k\in J_m}} u_k\Bigg) = \int_{\mathbf{R}_+^\star} x\,\mathrm{d}\mu_u^+(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ u_k\in J'_m}} u_k\Bigg) = \int_{\mathbf{R}_-^\star} x\,\mathrm{d}\mu_u^-(x).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k &= \int_{\mathbf{R}_+^\star} x\,\mathrm{d}\mu_u^+(x) + \int_{\mathbf{R}_-^\star} x\,\mathrm{d}\mu_u^-(x)\\ &= \int_{\mathbf{R}^\star} x\,\mathrm{d}\mu_u(x)\\ &= \int_{\mathbf{R}} x\,\mathrm{d}\mu_u(x).\end{aligned}$$

□

3.2 Une généralisation

Avant de passer à une généralisation de la proposition 3.1, posons une définition.

Proposition 3.2. *Mesure image*
Soit $(X, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré et $(Y, \mathscr{Y})$ un espace mesurable. Soit $f : X \to Y$ une application mesurable. L'application ν définie sur $\mathscr{Y}$ par :

$$\forall B \in \mathscr{Y}, \quad \nu(B) := \mu\left(f^{-1}(B)\right)$$

est une mesure sur Y, appelée mesure image par f. On écrit parfois aussi $\nu = f_{\#}\mu$.

Démonstration. La preuve est claire d'après les propriétés sur les images réciproques.

□

L'intérêt de la notion de mesure image est la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Formule de changement de variable*
Les notations sont les mêmes que celles utilisées à la définition 3.2. Soit $g : Y \to \mathbf{R}$. g est intégrable pour la mesure $f_{\#}\mu$ si, et seulement si, $g \circ f$ est intégrable pour la mesure μ. Le cas échéant, on a :

$$\int_Y g \,\mathrm{d}f_{\#}\mu = \int_X g \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

La preuve est renvoyée à [2]. Nous pouvons énoncer une généralisation de la proposition 3.1.

Proposition 3.4. *Une formule de transfert*
Soit $u \in D(\mathbf{R})$ évanescente. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que la suite $f(u)$ est évanescente. Alors, $f(u) \in D(\mathbf{R})$ et :

$$\varphi(f(u)) = \int_{\mathbf{R}} f(x) \mathrm{d}\mu_u(x).$$

Remarque 4. f est supposée continue et non pas mesurable car pour une application mesurable quelconque, la quantité $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)$ n'est, *a priori*, pas bien définie.

Démonstration.

- Soit $]a, b[$ un ouvert de $\mathbf{R}$ avec $a < b$ et $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a :

$$\operatorname{card}\{k \in [\![1, n]\!],\ f(u)_k \in]a, b[\} = \operatorname{card}\left\{k \in [\![1, n]\!],\ u_k \in f^{-1}(]a, b[\right\}).$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{card}\{k \in [\![1, n]\!],\ f(u)_k \in]a, b[\} = \mu_u(f^{-1}(]a, b[)).$$

- D'après la proposition 3.1 $\varphi(u) \in C(\mathbf{R})$ et on peut écrire :

$$\varphi(f(u)) = \int_{\mathbf{R}} x \,\mathrm{d}\mu_{f(u)}(x).$$

Or, si $]a, b[$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ avec $a < b$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_{f(u)}(]a, b[) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{card}\{k \in [\![1, n]\!],\ f(u)_k \in]a, b[\}}{n} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{card}\left\{k \in [\![1, n]\!],\ u_k \in f^{-1}(]a, b[)\right\}}{n} \\ &= \mu_u(f^{-1}(]a, b[)). \end{aligned}$$

Comme la tribu borélienne est engendrée par les ouverts, on en déduit $\mu_{f(u)} = f_{\#}\mu_u$. En utilisant la proposition 3.3, on obtient :

$$\varphi(f(u)) = \int_{\mathbf{R}} f(x) \,\mathrm{d}\mu_u(x).$$

□

On en déduit le corollaire suivant qui est une reformulation de la proposition 3.4.

Corollaire 3.1. *Soit $u \in D(\mathbf{R})$ évanescente. La suite de mesures* $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ *converge étroitement vers* μ_u.

Démonstration. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mu_{u,n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et bornée. Comme f est bornée, $f(u)$ est évanescente. D'après la proposition 3.4, la suite $f(u)$ appartient à $D(\mathbf{R})$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{d}\mu_{u,n}(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \varphi(f(u)) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{d}\mu_u(x).$$

□

4 Exemples

4.1 Le cas des suites équiréparties

Définition 4.1. *Suite équirépartie*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite de réels de l'intervalle $[a,b]$ ($(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $a<b$). On dit que u est équirépartie si pour tout $[c,d]\subset[a,b]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{card}\{k\in[\![1,n]\!],\ u_k\in[c,d]\}}{n} = \frac{d-c}{b-a}.$$

Une telle suite est clairement évanescente. Un exemple important de ce type de suite est donnée par la suite $(\{n\alpha\})_{n\in\mathbf{N}^\star}$ ($\{\cdot\}$ est la partie fractionnaire) lorsque α est un nombre irrationnel.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite équidistribuée de l'intervalle $[a,b]$. Par définition, μ_u est la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{A}([a,b])$. Par unicité, μ_u se prolonge en la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$. Si $f : [a,b]\to\mathbf{R}$ est une fonction continue, la proposition 3.4 se réécrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t.$$

On retrouve ainsi un résultat classique.

4.2 Cas des suites ayant un nombre fini de valeurs d'adhérence

Dans le cas où $u\in D(\mathbf{R})$ évanescente ayant un nombre fini de valeurs d'adhérence, disons $x_1,\dots,x_p$. μ_u est donc une mesure supportée sur $x_1,\dots,x_p$, donc $\mu_u = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\delta_{x_i}$ où les réels α_i sont positifs et δ_x est la mesure de Dirac en x. Comme μ_u est une mesure de probabilité, on a $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i = 1$.

Soit $i\in[\![1,p]\!]$. On peut calculer α_i. Soit $\varepsilon>0$ tel que $]x_i-\varepsilon,x_i+\varepsilon[\cap\{x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_p\}=\varnothing$. On a donc :

$$a_i = \lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{card}\{k\in[\![1,n]\!],\ u_k\in]x_i-\varepsilon,x_i+\varepsilon[\}}{n}.$$

Notons que la précédente limite ne dépend pas du choix de ε. En effet, si l'on choisit $\eta>0$ vérifiant la même condition que ε, on a aussi

$$a_i = \lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{card}\{k\in[\![1,n]\!],\ u_k\in]x_i-\eta,x_i+\eta[\}}{n}$$

car la partie $]x_i-\eta,x_i-\varepsilon]\cup[x_i+\varepsilon,x_i+\eta[$ (si l'on suppose par exemple $\eta\geq\varepsilon$) ne contient qu'un nombre fini de la suite u car sinon la suite aurait une valeur d'adhérence dans $[x_i-\eta,x_i-\varepsilon]\cup[x_i+\varepsilon,x_i+\eta]$, ce qui n'est pas le cas.

Nous retrouvons alors un résultat déjà énoncé dans [1].

4.3 Un contre-exemple

La proposition 3.1 assure qu'une suite $u \in D(\mathbf{R})$ évanescente converge au sens de Cesàro. Nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Il existe une suite qui converge au sens de Cesàro qui n'est dans $D(\mathbf{R})$.*

Démonstration. Il suffit évidemment de donner un exemple explicite. On construit la suite u de la façon suivante.

- $\star$ On pose $u_1 = 0$. On ajoute des blocs de 1 et -1 à la suite pour que la proportion de 1 dépasse 25%. Ici, on pose $u_2 = 1$ et $u_3 = -1$, de sorte que la proportion de 1 soit plus grande que 25%. Comme, on ajoute de 1 que de -1, la proportion est donc supérieure à 25% et la proportion de 0 est inférieure à 50%. On a $n_1 = 3$ le premier rang (en ajoutant des blocs de 1 et -1) soit plus grande que 25%.

  On note $n_2 > n_1$ le plus indice tel que, en ajoutant des 0 jusqu'au rang n_2 inclus , la proportion de 0 dépasse 75%. On remarque que ici $n_2 = 8$.

  On construit de même $n_3 > n_2$ le plus petit rang tel que, en ajoutant des blocs de 1 et -1 jusqu'au rang n_2 inclus, la proportion de 1 et de -1 dépasse 25%.

  On réitère la construction.

  $\star$ Pour justifier que $u \notin D(\mathbf{R})$, il suffit de remarquer que, par construction,

  $$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \frac{\operatorname{card}\{k \in [\![1, n_{2p}]\!],\ u_k \in]-1,1[\}}{n_{2p}} \geq 0{,}75 \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{card}\{k \in [\![1, n_{2p+1}]\!],\ u_k \in]-1,1[\}}{n_{2p+1}} \leq 0{,}5$$

  ainsi la suite $\left(\dfrac{\operatorname{card}\{k \in [\![1, n]\!],\ u_k \in]-1,1[\}}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ ne peut pas converger.

- Si l'on pose $s_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, il est clair que $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers 0 au sens de Cesàro car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \in \{0,1\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.

$\square$

5 Conclusion

L'ensemble des suites à densité évanescentes est un ensemble agréable pour calculer des limites de Cesàro grâce à la représentaion intégrale de $\varphi(u)$ de la proposition 3.1. Cela permet de donner une formule de transfert (proposition 3.4).

Une question paraît alors naturelle : peut-on énoncer des conditions suffisantes pour qu'une suite qui converge au sens de Cesàro appartienne à $D(\mathbf{R})$ et soit évanescente ?

Une première réponse est apportée par le théorème de Hardy.

Théorème 5.1. *Théorème de Hardy*

Soit $u \in C(\mathbf{R})$ telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Alors, u converge au sens classique.

Le théorème de Hardy ne répond que partiellement à notre question. La conclusion donnée est trop forte car d'après la proposition 1.2, une suite qui converge au sens classique appartient à $D(\mathbf{R})$ et est évanescente. L'hypothèse $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ devrait logiquement pouvoir être affaiblie. La question reste ouverte. Un bon point de départ serait de réussir à montrer que, sous l'hypothèse du théorème de Hardy, la suite u est à densité et évanescente.

Références

[1] G. Bécigneul, *Fréquence et régularité d'une valeur d'adhérence. Application aux moyennes de Cesàro de suites divergentes.* Revue Quadrature numéro 103, 2017.

[2] C. Wagschal, *Dérivation, intégration.* Hermann, 2009.