

Chapitre 5 : Fonctions vectorielles

Table des matières

1	Rappels sur les fonctions d'une variable réelle	2
1.1	Rappels des notions fondamentales	2
1.2	Théorème des accroissements finis	2
1.3	Formules de Taylor	3
2	Fonctions vectorielles	4
2.1	Généralités	4
2.2	Fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^k	5
2.3	Développement limité d'une fonction vectorielle	5
2.4	Formules sur les dérivées	6
3	Arcs paramétrés	8
3.1	Généralités	8
3.2	Tangente en un point	9
3.3	Position relative de la courbe et sa tangente	9
3.4	Longueur d'un arc paramétré	11
4	Exemples	12
4.1	Réduction du domaine d'étude et utilisation des symétries	12
4.2	Étude de l'astroïde	14
4.3	Étude du lemniscate de Bernoulli	15
4.4	Étude de la strophoïde	15

1 Rappels sur les fonctions d'une variable réelle

1.1 Rappels des notions fondamentales

Définition 1. *Continuité en un point.*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$. On dit que f est **continue** en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Définition 2. *Continuité sur un intervalle.*

On dit qu'une fonction est **continue** sur un intervalle si elle est continue en chacun des points de cet intervalle.

Définition 3. *Dérivabilité en un point.*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a si la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe. En cas d'existence, elle est notée $f'(a)$.

Définition 4. *Dérivabilité sur un intervalle.*

On dit qu'une fonction est **dérivable** sur un intervalle si elle est dérivable en chacun des points de cet intervalle.

La fonction f' est alors la fonction $f : x \in I \mapsto f'(x)$.

Proposition 1. *Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.*

Démonstration. Voir cours de TSI 1. □

⚠ La réciproque est fautive comme le montre la fonction valeur absolue : elle est continue en 0, mais n'y est pas dérivable.

Définition 5. *Fonction de classe \mathcal{C}^k .*

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

- (i) Soit $k \in \mathbf{N}$. On dit que f est de **classe \mathcal{C}^k** sur I si f est k fois dérivable sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I .
- (ii) On dit que f est de **classe \mathcal{C}^∞** sur I si f est de classe \mathcal{C}^k sur I pour tout $k \in \mathbf{N}$.

1.2 Théorème des accroissements finis

Rappelons deux résultats fondamentaux.

Théorème 1. *Théorème de Rolle.*

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbf{R} et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Voir cours de TSI 1. □

Exemple 1. Soit P une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbf{N}^*$ scindé à coefficients réels. Alors, P' est une fonction polynomiale scindé.

On note $x_1 < \dots < x_n$ les racines de P . En appliquant le théorème de Rolle entre x_i et x_{i+1} ($i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$), il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$.

Comme P' est une fonction polynomiale de degré $n-1$ et comme $P'(y_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, il s'ensuit que P' est scindé.

Exemple 2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

Montrons qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $\frac{f(c)}{c} = f'(c)$.

On introduit sur $[0, 1]$ la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. g est clairement continue sur $]0, 1[$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0 = g(0),$$

on en déduit que g est continue en 0, donc g est continue sur $[0, 1]$.

Il est clair que g est dérivable sur $]0, 1[$ et $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$.

Comme $g(0) = g(1) = 0$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$, soit $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Théorème 2. *Théorème des accroissements finis.*

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbf{R} et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Démonstration. Voir cours de TSI 1. □

Exemple 3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Soit $(x, y) \in [a, b]^2$ avec $x \neq y$. Le théorème des accroissements finis assure qu'il existe c entre x et y tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$, puis

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|.$$

Or, $|f'|$ est continue sur $[a, b]$ car f est de classe \mathcal{C}^1 , donc $|f'|$ est bornée : il existe $M \geq 0$ tel que $|f'| \leq M$. Il s'ensuit que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq M|x - y|.$$

On remarque que la précédente inégalité est claire si $x = y$.

1.3 Formules de Taylor

Théorème 3. *Formule de Taylor-Young.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^n . Soit $a \in I$. Alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

Démonstration. Voir cours de TSI 1. □

Remarque 1. Cette formule permet de retrouver tous les développements limités usuels. Rappelons qu'il faut tous les connaître!

Exemple 4. Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3}$. On sait que

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On en déduit que $\sin(x) - \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$, ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

Théorème 4. Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} . Alors, pour tout $(a, x) \in I^2$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Démonstration. Voir cours de TSI 1. □

Exemple 5. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et sa somme vaut e^x .

Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+ , on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt.$$

Or,

$$\left| \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt \right| \leq \frac{1}{n!} \int_0^x |(x-t)^n e^t| dt \leq \frac{x^{n+1} e^x}{n!}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1} e^x}{n!} = 0$, donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt = 0$. Il s'ensuit que $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

2 Fonctions vectorielles

Dans toute la suite du chapitre, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et I est un intervalle non trivial de \mathbf{R} .

2.1 Généralités

Définition 6. Fonction vectorielle.

On appelle **fonction vectorielle** toute fonction de I sur \mathbf{R}^n .

Remarque 2. Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une fonction vectorielle, on peut l'écrire sous la forme $f = (x_1, \dots, x_n)$ où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i est une fonction de I sur \mathbf{R} .

Exemple 6. La fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est une fonction vectorielle où les fonctions x et y sont définies sur \mathbf{R} par $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$.

Définition 7. On considère une fonction vectorielle $f = (x_1, \dots, x_n) : I \rightarrow \mathbf{R}^n$. Soit $a \in I$.

- (i) On dit que f est **continue** en a , si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i est continue en a .
- (ii) On dit que f est **continue** sur I , si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i est continue sur I .
- (iii) On dit que f est **dérivable** en a , si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i est dérivable en a et on pose alors

$$f'(a) = (x'_1(a), \dots, x'_n(a)).$$

- (iv) On dit que f est **dérivable** sur I , si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i est dérivable sur I et on pose alors

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)).$$

Remarque 3. La dérivée correspond à la vitesse du point mobile $f(t)$ à l'instant t .

Exemple 7. En reprenant f définie ci-dessus, f est dérivable sur \mathbf{R} et pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$.

Proposition 2. Opérations sur les fonctions vectorielles.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ deux fonctions vectorielles. Soit $\lambda : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle.

- (i) Si f et g sont continues sur I (resp. dérivable sur I), alors $f + g$ est continue sur I (resp. dérivable sur I et pour tout $t \in I$, $(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t)$).

- (ii) Si λ et f sont dérivables sur I , alors la fonction vectorielle λf est dérivable sur I et pour tout $t \in I$, $(\lambda f)' = \lambda f' + \lambda' f$.

Démonstration. (i) Il suffit d'utiliser les théorèmes relatifs à la somme de fonction continues (resp. dérivables) pour les fonctions coordonnées.

- (ii) Il suffit d'utiliser la formule permettant de calculer la dérivée d'un produit pour les fonctions coordonnées. \square

2.2 Fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^k

Définition 8. *Fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^k .*

Soit $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

On dit que $f = (x_1, \dots, x_n) : I \rightarrow \mathbf{R}$ est de **classe \mathcal{C}^k** si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i est de classe \mathcal{C}^k sur I .

Notation. On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions vectorielles définies sur I à valeurs dans \mathbf{R}^n de classe \mathcal{C}^k sur I .

Remarque 4. La dérivée seconde correspond à l'accélération du point mobile $f(t)$ à l'instant t .

Proposition 3. *L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}^n)$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles.*

Démonstration. Il suffit remarquer que $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}^n)$ contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire : cela résulte du fait que $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$ est un espace vectoriel (que l'on utilise aux fonctions coordonnées). \square

2.3 Développement limité d'une fonction vectorielle

Définition 9. *Développement limité.*

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, $a \in I$ et $k \in \mathbf{N}$. La fonction vectorielle f admet un **développement limité en a à l'ordre k** s'il existe des vecteurs $v_0, \dots, v_k \in \mathbf{R}^n$ tels que pour tout $h \in \mathbf{R}$ tel que $a + h \in I$

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} v_0 + v_1 h + \dots + v_k h^k + o(h^k).$$

Remarque 5. (i) Si f admet un développement limité à l'ordre k en a , alors f admet un développement limité en a à l'ordre ℓ pour tout $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

- (ii) La fonction f admet un développement limité en a à l'ordre k si, et seulement si, ses fonctions composantes admettent un développement limité à l'ordre k en a .

Exemple 8. En reprenant la fonction f de l'exemple 6, on a

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} (1, 0) + (0, 1)t + \left(-\frac{1}{2}, 0\right)t^2 + \left(0, -\frac{1}{6}\right)t^3 + o(t^3).$$

Théorème 5. *Formule de Taylor-Young.*

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^k . Soit $a \in I$. Alors f admet un développement limité à l'ordre k en a et pour tout $h \in \mathbf{R}$ tel que $a + h \in I$, on a

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^k).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Young à chacune des fonctions coordonnées, qui sont de classe \mathcal{C}^k d'après la définition 8. \square

2.4 Formules sur les dérivées

Proposition 4. Dérivée d'un produit scalaire et d'une norme.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ deux fonctions vectorielles dérivables sur I .

(i) L'application s définie sur I par $s(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad s'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

(ii) Soit l'application n définie sur I par $n(t) = \|f(t)\|$. Si f ne s'annule pas sur I , alors n est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad n'(t) = \frac{\langle f(t), f'(t) \rangle}{\|f(t)\|}.$$

Remarque 6. Le lecteur observateur remarquera en (i) que la formule est la même que celle qui donne la dérivée d'un produit. C'est normal!

On utilisera l'inégalité suivante, dite inégalité de Cauchy-Schwarz, que l'on prouvera dans un chapitre ultérieur.

Proposition 5. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 . On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour $i \in \{2, 3\}$, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^i, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|.$$

Démonstration. (i) Soient $t \in I$ et $h \in \mathbf{R}$ tel que $t+h \in I$. Comme f et g sont dérivables en t , d'après le théorème 5, il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$ telles que

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + h\varepsilon_1(h) \quad \text{et} \quad g(t+h) = g(t) + hg'(t) + h\varepsilon_2(h).$$

En utilisant la bilinéarité de s , on peut écrire

$$\begin{aligned} s(t+h) &= \langle f(t) + hf'(t) + h\varepsilon_1(h), g(t) + hg'(t) + h\varepsilon_2(h) \rangle \\ &= \langle f(t), g(t) \rangle + h(\langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle) \\ &\quad + h(\langle \varepsilon_1(h), g(t) \rangle + \langle f(t), \varepsilon_2(h) \rangle) \\ &\quad + h^2(\langle f'(t), \varepsilon_2(h) \rangle + \langle \varepsilon_1(h), g'(t) \rangle + \langle \varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h) \rangle) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} &= \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle \\ &\quad + \langle \varepsilon_1(h), g(t) \rangle + \langle f(t), \varepsilon_2(h) \rangle + h(\langle f'(t), \varepsilon_2(h) \rangle + \langle \varepsilon_1(h), g'(t) \rangle + \langle \varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h) \rangle). \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 5), on a

$$|\langle \varepsilon_1(h), g(t) \rangle + \langle f(t), \varepsilon_2(h) \rangle| \leq |\varepsilon_1(h)| |g(t)| + |\varepsilon_2(h)| \|f(t)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

et

$$|h(\langle f'(t), \varepsilon_2(h) \rangle + \langle \varepsilon_1(h), g'(t) \rangle + \langle \varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h) \rangle)| \leq |h| (|f'(t)| |\varepsilon_2(h)| + |g'(t)| |\varepsilon_1(h)| + |\varepsilon_1(h)| |\varepsilon_2(h)|) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

On en déduit donc que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

(ii) Soient $t \in I$ et $h \in \mathbf{R}$ tel que $t + h \in I$. On écrit

$$\begin{aligned} n(t+h) - n(t) &= \|f(t+h)\| - \|f(t)\| \\ &= \frac{\|f(t+h)\|^2 - \|f(t)\|^2}{\|f(t+h)\| + \|f(t)\|} \\ &= \frac{\langle f(t+h), f(t+h) \rangle - \langle f(t), f(t) \rangle}{\|f(t+h)\| + \|f(t)\|} \end{aligned}$$

D'après (i), il existe une fonction ε vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ telle que

$$\langle f(t+h), f(t+h) \rangle = \langle f(t), f(t) \rangle + 2h \langle f'(t), f(t) \rangle + h\varepsilon(h).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{n(t+h) - n(t)}{h} = \frac{2 \langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t+h)\| + \|f(t)\|} + \frac{\varepsilon(h)}{\|f(t+h)\| + \|f(t)\|}.$$

Comme $\|\cdot\|$ est continue sur \mathbf{R}^n et f est continue sur I , on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(t+h)\| = \|f(t)\|$, ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{n(t+h) - n(t)}{h} = \frac{\langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t)\|}.$$

□

Proposition 6. Dérivée d'un produit vectoriel.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ deux applications vectorielles dérivables. L'application v l'application définie sur I par $v(t) = f(t) \wedge g(t)$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad v'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

Proposition 7. Rappel sur la norme d'un produit vectoriel.

Soient u et v deux vecteurs de \mathbf{R}^3 . Le vecteur $u \wedge v$ a pour norme $\|u\| \|v\| |\sin(u, v)|$. En particulier,

$$\|u \wedge v\| \leq \|u\| \|v\|.$$

Remarque 7. Le lecteur toujours observateur remarquera que la formule est la même que celle qui donne la dérivée d'un produit. C'est encore normal!

Démonstration. Adapter la preuve de (i) de la proposition 4. L'argument important est la linéarité du produit vectoriel par rapport à chacune de ses variables.

□

Proposition 8. Dérivée d'un déterminant.

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ trois fonctions vectorielles dérivables sur I .

(i) Si $n = 2$, l'application D définie sur I par $D(t) = \det(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad D'(t) = \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t)).$$

(ii) Si $n = 3$, l'application D définie sur I par $D(t) = \det(f(t), g(t), h(t))$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad D'(t) = \det(f'(t), g(t), h(t)) + \det(f(t), g'(t), h(t)) + \det(f(t), g(t), h'(t)).$$

Avant de prouver cette proposition, nous utiliserons le lemme suivant qui nous permet de majorer le déterminant d'une matrice en fonction de la norme de ses colonnes. C'est une version affaiblie (mais simple) d'une inégalité due à Hadamard.

Lemme 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On écrit $A = (C_1 | \dots | C_n)$ ses colonnes. En notant, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|C_j\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^2}$, on a

$$|\det(A)| \leq n^{n/2} \prod_{j=1}^n \|C_j\|.$$

Démonstration. D'après la proposition 13 du chapitre 3 (vous l'avez en tête, bien sûr!), on a

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^2} = \sqrt{n} \|C_j\|.$$

On en déduit que

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n (\sqrt{n} \|C_j\|) = n^{n/2} \prod_{j=1}^n \|C_j\|.$$

□

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 8.

Démonstration. (i) Soient $t \in I$ et $h \in \mathbf{R}$ tel que $t+h \in I$. Comme f et g sont dérivables en t , d'après le théorème 5, il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$ telles que

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + h\varepsilon_1(h) \quad \text{et} \quad g(t+h) = g(t) + hg'(t) + h\varepsilon_2(h).$$

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses variables, on a

$$\begin{aligned} D(t+h) &= \det(f(t+h), g(t+h)) \\ &= \det(f(t) + hf'(t) + h\varepsilon_1(h), g(t) + hg'(t) + h\varepsilon_2(h)) \\ &= D(t) + h(\det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))) \\ &\quad + h(\det(f(t), \varepsilon_2(h)) + \det(\varepsilon_1(h), g(t))) \\ &\quad + h^2(\det(f'(t), g'(t)) + \det(f'(t), \varepsilon_2(h)) + \det(\varepsilon_1(h), g'(t)) + \det(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h))) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{D(t+h) - D(t)}{h} &= \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t)) \\ &\quad + \det(f(t), \varepsilon_2(h)) + \det(\varepsilon_1(h), g(t)) \\ &\quad + h(\det(f'(t), g'(t)) + \det(f'(t), \varepsilon_2(h)) + \det(\varepsilon_1(h), g'(t)) + \det(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h))). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1, on a

$$|\det(f(t), \varepsilon_2(h))| \leq 2 \|f(t)\| \|\varepsilon_2(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad |\det(\varepsilon_2(h), g(t))| \leq 2 \|\varepsilon_2(h)\| \|g(t)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

On montre de même que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h(\det(f'(t), g'(t)) + \det(f'(t), \varepsilon_2(h)) + \det(\varepsilon_1(h), g'(t)) + \det(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h))) = 0.$$

$$\text{Il s'ensuit que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(t+h) - D(t)}{h} = \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t)).$$

(ii) La preuve est analogue à la précédente.

□

3 Arcs paramétrés

3.1 Généralités

Définition 10. *Arc paramétré.*

Un **arc paramétré** est une fonction vectorielle de I vers \mathbf{R}^n .

Remarque 8. On utilise la terminologie d'arc paramétré lorsque l'on veut étudier l'ensemble $\mathcal{C} = f(I)$. On dit que f paramètre l'arc \mathcal{C} , mais ce n'est pas la seule.

Exemple 9. Si $h : I \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction. Alors sa courbe représentative \mathcal{C}_h est un arc paramétré par la fonction $f : t \in I \mapsto (t, h(t))$.

3.2 Tangente en un point

On fixe un arc paramétré \mathcal{C} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ qui paramètre l'arc. Soit $a \in I$. On suppose que $f(t) \neq f(a)$ pour t assez proche de a .

Définition 11. *Tangente.*

Si les deux limites suivantes existent et sont égales **ou** opposées

$$f'_g(a) = \lim_{t \rightarrow a^-} \frac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|} \quad \text{et} \quad f'_d(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|},$$

la **tangente** en $f(a)$ est alors la droite passant par $f(a)$ et dirigée par $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$.

Proposition 9. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^∞ et qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^{(k)}(a) \neq 0$.

Soit $p = \min \{ \ell \in \mathbf{N}^*, f^{(\ell)}(a) \neq 0 \}$. La tangente en $f(a)$ est dirigée par $f^{(p)}(a)$.

Démonstration. On utilise la formule de Taylor-Young :

$$f(t) = f(a) + \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (t-a)^p + o((t-a)^p).$$

Il s'ensuit que, pour tout $t > a$, on a

$$\frac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|} = \frac{\frac{f^{(p)}(a)}{p!} (t-a)^p + o((t-a)^p)}{\left\| \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (t-a)^p + o((t-a)^p) \right\|} = \frac{f^{(p)}(a) + o(1)}{\|f^{(p)}(a) + o(1)\|} \xrightarrow{t \rightarrow a^+} \frac{f^{(p)}(a)}{\|f^{(p)}(a)\|}.$$

Pour $t < a$, on a

$$\frac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|} = \frac{\frac{f^{(p)}(a)}{p!} (t-a)^p + o((t-a)^p)}{\left\| \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (t-a)^p + o((t-a)^p) \right\|} = \frac{(t-a)^p}{|t-a|^p} \times \frac{f^{(p)}(a) + o(1)}{\|f^{(p)}(a) + o(1)\|} \xrightarrow{t \rightarrow a^-} \varepsilon \frac{f^{(p)}(a)}{\|f^{(p)}(a)\|}$$

$$\text{où } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}.$$

D'après la définition 11, la tangente à la courbe admet une tangente en $f(a)$ dirigée par $\frac{f^{(p)}(a)}{\|f^{(p)}(a)\|}$ et $\varepsilon \frac{f^{(p)}(a)}{\|f^{(p)}(a)\|}$. □

Définition 12. *Point régulier.*

On dit qu'un point $f(a)$ est **régulier** si $f'(a)$ existe et est non nul.

Corollaire 1. Si le point $f(a)$ est régulier, alors la tangente à la courbe paramétrée par f en a existe et est dirigée par $f'(a)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 9. □

3.3 Position relative de la courbe et sa tangente

On considère une courbe paramétrée par $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ de classe \mathcal{C}^∞ . On suppose que les deux entiers ci-dessous existent

$$p = \min \{ k \in \mathbf{N}^*, f^{(k)}(a) \neq 0 \}$$

et

$$q = \min \{ k \in \mathbf{N}^*, f^{(k)}(a) \text{ n'est pas colinéaire à } f^{(p)}(a) \}.$$

Par définition, on a $1 \leq p < q$.

Proposition 10. *Position relative d'un arc paramétré et d'une de ses tangente.*

Avec les notations ci-dessus, on a :

- (i) si q est pair, alors la tangente en $f(a)$ à la courbe paramétrée par f reste du même côté que la courbe au voisinage de a ;
- (ii) si q est impair, alors la tangente en $f(a)$ à la courbe paramétrée par f coupe la courbe au voisinage de a .

Démonstration. D'après la formule de Taylor-Young, on écrit

$$f(t) = f(a) + \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (t-a)^p + \dots + \frac{f^{(q)}(a)}{q!} (t-a)^q + o((t-a)^q).$$

Comme pour tout $k \in \llbracket p+1, q-1 \rrbracket$, les vecteurs $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ sont colinéaires à $v_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$, on écrit

$$\forall k \in \llbracket p+1, q-1 \rrbracket, \quad \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \lambda_k v_p.$$

En posant $v_q = \frac{f^{(q)}(a)}{q!}$, on a alors

$$f(t) - f(a) = (t-a)^p \left(1 + \lambda_{p+1} (t-a) v_p + \dots + \lambda_{q-p-1} (t-a)^{q-1-p} \right) v_p + (t-a)^q v_q + o((t-a)^q). \quad (1)$$

Comme v_p et v_q ne sont pas colinéaires, la famille (v_p, v_q) est une base de \mathbf{R}^2 .

Pour alléger les notations, on pose $\alpha_t = 1 + \lambda_{p+1} (t-a) v_p + \dots + \lambda_{q-p-1} (t-a)^{q-1-p}$. Remarquons que $\lim_{t \rightarrow a} \alpha_t = 1$. La ligne (1) se réécrit alors en

$$f(t) - f(a) - \alpha_t (t-a)^p v_p = (t-a)^q v_q + o((t-a)^q).$$

- (a) Si q est pair, alors $(t-a)^q \geq 0$ au voisinage de a , donc la courbe paramétrée par f reste dans le demi-plan $\mathbf{R}_+ v_q$. Ainsi, la tangente à la courbe paramétrée et la courbe reste du même côté lorsque t est dans un voisinage de a .
- (b) Si q est impair, alors $(t-a)^q$ change de signe au voisinage de a , donc la courbe paramétrée par f ne reste pas dans le demi-plan $\mathbf{R}_+ v_q$. Ainsi, la tangente à la courbe paramétrée coupe la courbe en $f(a)$.

□

Définition 13. *On conserve les notations et les hypothèses introduites ci-dessus.*

- (i) Si p est impair et q pair, on dit que le point est **ordinaire**.
- (ii) Si p est impair et q impair, on dit que le point est un point d'**inflexion**.
- (iii) Si p est pair et q impair, on dit que le point est un point de **rebroussement de première espèce**.
- (iv) Si p est pair et q pair, on dit que le point est un point de **rebroussement de seconde espèce**.

Voici les différentes situations. On a noté \mathcal{T} la tangente.

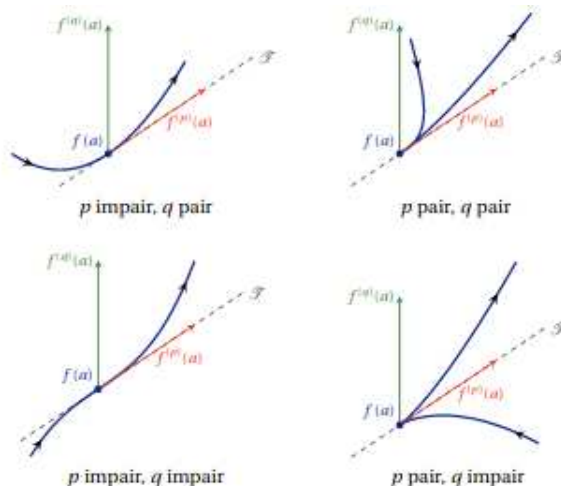


FIGURE 1 – Les quatre types de points.

3.4 Longueur d'un arc paramétré

Définition 14. *Longueur d'une courbe.*

Soit \mathcal{C} une courbe paramétrée par une fonction vectorielle $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. On définit la **longueur de la courbe entre a et b**, notée $L(a, b, f)$ par

$$L(a, b, f) = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1}=b, m \in \mathbf{N}^*} \sum_{k=0}^m \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\|$$

où le **suprémum** est pris dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Remarque 9. La définition semble obscure. Un dessin permet de comprendre.

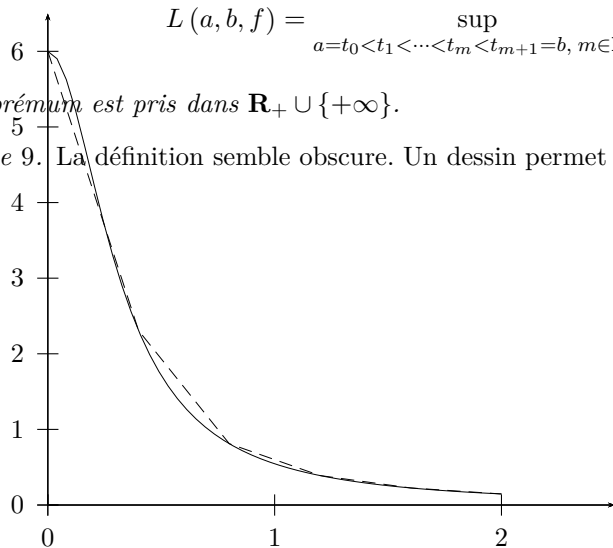


FIGURE 2 – Approximation de la longueur d'une courbe.

La somme des longueurs des segments en pointillé est une approximation d'autant meilleure que l'on augmente le nombre de points de la subdivision de l'intervalle.

Proposition 11. *Longueur d'un arc de classe \mathcal{C}^1 .*

Avec les mêmes notations que la définition 14, si f est supposée de classe \mathcal{C}^1 sur I , on a :

$$L(a, b, f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Démonstration. Nous n'allons pas faire la preuve en toute généralité (trop technique) mais simplement donner les étapes qui suffisent largement à comprendre.

(i) On commence par remarquer que

$$L(a, b, f) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \left\| f\left(a + (k+1) \frac{b-a}{m}\right) - f\left(a + k \frac{b-a}{m}\right) \right\|.$$

(ii) Par définition de la norme et en introduisant x_1, \dots, x_n les fonctions coordonnées de f , on a

$$L(a, b, f) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(x_j\left(a + (k+1) \frac{b-a}{m}\right) - x_j\left(a + k \frac{b-a}{m}\right)\right)^2}.$$

(iii) On utilise l'égalité des accroissements finis à chaque fonction coordonnée entre $a + k \frac{b-a}{m}$ et $a + (k+1) \frac{b-a}{m}$: il existe $\zeta_{j,k,m} \in \left] a + k \frac{b-a}{m}, a + (k+1) \frac{b-a}{m} \right[$ tel que :

$$x_j\left(a + (k+1) \frac{b-a}{m}\right) - x_j\left(a + k \frac{b-a}{m}\right) = \frac{b-a}{m} x'_j(\zeta_{j,k,m})$$

de sorte que

$$L(a, b, f) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{j=1}^n x'_j(\zeta_{j,k,m})^2}.$$

(iv) On reconnaît une somme de Riemann (en fait, ce n'est pas une somme de Riemann telle que vous l'avez défini en TSI 1, mais on peut s'y ramener), ainsi

$$L(a, b, f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

□

Exemple 10. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

La longueur de la courbe entre les points $f(0) = (1, 0)$ et $f(2\pi) = (1, 0)$ est donnée par

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

On retrouve le périmètre du cercle trigonométrique.

4 Exemples

4.1 Réduction du domaine d'étude et utilisation des symétries

Soit \mathcal{C} un arc paramétré par $f = (x, y) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$.

Restriction par périodicité. Lorsque x et y sont T -périodiques, on étudie f sur un intervalle de longueur T , par exemple $[0, T]$.

Restriction par symétrie. Un certain nombre de transformations simples permettent encore de réduire l'intervalle d'étude. On peut retenir le tableau suivant.

Propriété	Restriction	Transformation
x et y paires	$I \cap \mathbf{R}_+$	identité
x paire, y impaire	$I \cap \mathbf{R}_+$	symétrie par rapport à l'axe (Ox)
x impaire, y paire	$I \cap \mathbf{R}_+$	symétrie par rapport à l'axe (Oy)
x et y impaire	$I \cap \mathbf{R}_+$	symétrie par rapport à O

Plan d'étude d'un arc paramétré. Soit $f = (x, y) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ que l'on suppose de classe \mathcal{C}^1 . On se propose d'étudier l'arc $\mathcal{C} = f(I)$.

1. On détermine l'ensemble de définition de x et de y . On essaie de restreindre l'intervalle en remarquant des propriétés de périodicité et/ou de parité.
2. On dresse le tableau de variations de x et y .
 - (a) On justifie que les fonctions x et y sont dérivables sur I .
 - (b) On résout les équations $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$ pour $t \in I$.
 - (c) On étudie les signes de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in I$.
 - (d) On en déduit les tableaux de variations de x et y sur I .
3. On détermine une équation de la tangente en chaque point $f(t)$ apparaissant dans le tableau de variations.
4. On trace la courbe.
 - (a) On place sur le graphique les différentes valeurs de $f(t)$ qui apparaissent dans le tableau.
 - (b) On trace la tangente en chacun de ces points.
 - (c) On relie ces points en prenant évidemment en compte les variations de x et y .
5. Si l'on a restreint l'intervalle d'étude, on n'oublie pas d'effectuer les transformations qui permettent d'obtenir toute la courbe.

Étude des points d'inflexion. Soit un arc paramétré par une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ que l'on suppose de classe \mathcal{C}^∞ . On souhaite étudier les points d'inflexion de \mathcal{C} . On peut retenir le plan suivant.

1. On détermine les réels $a \in I$ pour lesquels $f'(a)$ et $f''(a)$ sont colinéaires, par exemple en utilisant le déterminant.
2. Parmi les points trouvés, on trouve les entiers p et q et on détermine si le point est ou non un point d'inflexion.

4.2 Étude de l'astroïde

On se propose d'étudier l'arc paramétré par la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$.

On pose $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$.

x et y sont 2π -périodiques, on étudie f sur $[0, 2\pi]$. De plus, x est paire et y impaire, on restreint l'étude sur l'intervalle $[0, \pi]$.

x et y sont dérivables sur $[0, \pi]$ et on a :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad x'(t) = -3 \sin(t) \cos^2(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 3 \cos(t) \cos^2(t).$$

On en déduit :

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$x'(t)$	-	0	-
$x(t)$	1	0	-1
$y'(t)$	+	0	-
$y(t)$	0	1	0

On a facilement $f(0) = (1, 0)$, $f(\pi/2) = (0, 1)$ et $f(\pi) = (-1, 0)$.

On remarque que $f'(0) = f'(\pi/2) = f'(\pi) = 0$, ainsi pour connaître la direction de la tangente, on calcule f'' . On a

$$\forall t \in [0, \pi], \quad f''(t) = (-3(\cos^3(t) - 2\sin^2(t)\cos(t)), 3(-\sin^3(t) + 2\cos^2(t)\sin(t))).$$

On a donc $f''(0) = (-3, 0)$, $f''(\pi/2) = (0, -3)$ et $f''(\pi) = (3, 0)$.

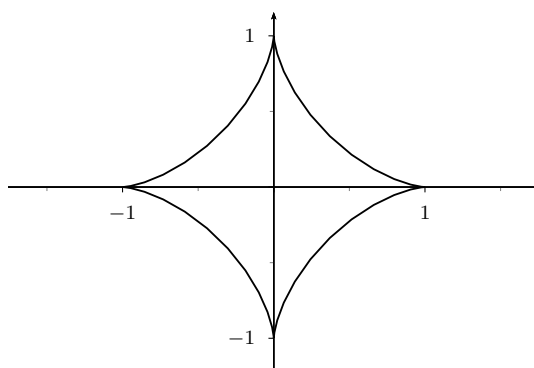


FIGURE 3 – Astroïde.

Calculons la longueur de l'astroïde. Par 2π -périodicité et d'après la proposition 11, la longueur est

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2(t)\cos^4(t) + 9\cos^2(t)\sin^4(t)} dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} |\cos(t)\sin(t)| dt \\ &= 6. \end{aligned}$$

4.3 Étude du lemniscate de Bernoulli

On se propose d'étudier l'arc paramétré par la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $f(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$.

On pose $x(t) = \frac{t}{1+t^4}$ et $y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$.

Les fonctions x et y sont définies sur \mathbf{R} . On remarque qu'elles sont toutes les deux impaires, ainsi on restreint l'étude sur \mathbf{R}_+ .

x et y sont dérivables sur \mathbf{R}_+ et

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad x'(t) = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$

On en déduit :

t	0	$\sqrt[4]{1/3}$	$\sqrt[4]{3}$	$+\infty$
$x'(t)$	+	0	-	-
$x(t)$	0	$\frac{3}{4}\sqrt[4]{1/3}$	$\frac{1}{4}\sqrt[4]{3}$	0
$y'(t)$	+	+	0	-
$y(t)$	0	$\frac{3}{4}\sqrt[4]{1/27}$	$\frac{1}{4}\sqrt[4]{27}$	0

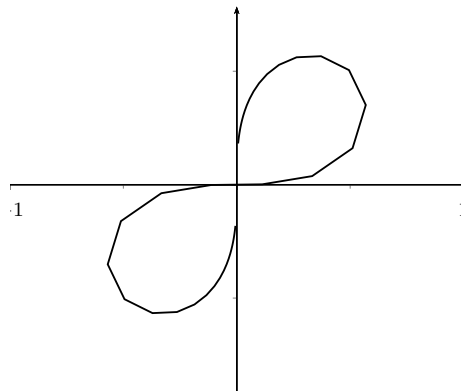


FIGURE 4 – Lemniscate de Bernoulli.

4.4 Étude de la strophoïde

On se propose d'étudier l'arc paramétré par la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ avec $f(t) = \left(-\frac{1-t^2}{1+t^2}, -t\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$.

On pose $x(t) = -\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y(t) = -t\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Les fonctions x et y sont définies sur \mathbf{R} . On remarque que x est paire et y est impaire, on restreint l'étude sur \mathbf{R}_+ .

x et y sont dérivables sur \mathbf{R}_+ et on a

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad x'(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{(t^2+2-\sqrt{5})(t^2+2+\sqrt{5})}{(1+t^2)^2}.$$

On en déduit :

t	0	$\sqrt{\sqrt{5}-2}$	$+\infty$
$x'(t)$	0	+	+
$x(t)$	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	1
$y'(t)$		-	0
$y(t)$	0	$\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}(1-\sqrt{5})}{2}$	$+\infty$

Comme $x'(\sqrt{\sqrt{5}-2}) = 0$ et $y'(\sqrt{\sqrt{5}-2}) \neq 0$, la tangente en $f(\sqrt{\sqrt{5}-2})$ est dirigée par une tangente parallèle à l'axe (Oy) .

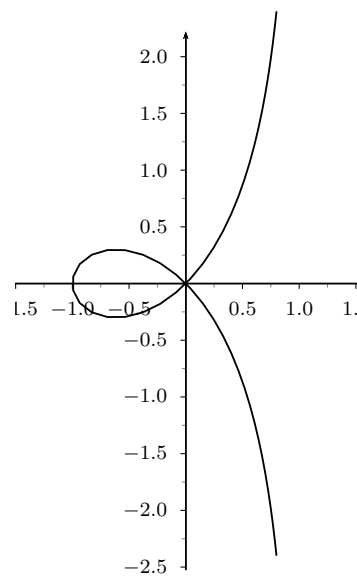


FIGURE 5 – Strophoïde.