Chapitre 6 : Exercices

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 + A^2 - A - \mathrm{I}_3 = 0$.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$, alors $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.
3. En déduire que $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \{-1, 1\}$.
4. Sans calculer le polynôme caractéristique de A, trouver ses valeurs propres.

Exercice 2.

Soit la matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les matrices colonnes X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
3. A est-elle inversible ?

Exercice 3.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E tel que $f^2 + f + \mathrm{id}_E = 0$.

1. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$, alors $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.
2. En déduire que $\mathrm{Sp}\,(f) = \varnothing$.

Exercice 4.

On considère l'application φ définie sur $\mathscr{M}_n\,(\mathbf{K})$ par $\varphi\,(M) = M + \mathrm{Tr}\,(M)\,\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n\,(\mathbf{K})$.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 5.

Soit $E = \mathscr{C}^\infty\,(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Soit $d : f \in E \longmapsto f'$. Vérifier que d est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Exercice 6.

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes de $\mathscr{M}_4\,(\mathbf{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{C}_3\,[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbf{C}_3\,[X], \quad u\,(P) = X^3 P\left(\frac{1}{X}\right).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u.
2. Donner les valeurs propres de u, ainsi que leur ordre de multiplicité.
3. Expliciter les sous-espaces propres de u. u est-il diagonalisable ?

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit u l'application définie sur $\mathbf{K}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X], \quad u(P) = P\left(\frac{X+1}{2}\right).$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$.
2. Montrer que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ est triangulaire supérieure.
3. En déduire les valeurs propres de u et leur ordre de multiplicité.
4. Calculer, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $u\left((X-1)^k\right)$. En déduire les sous-espaces propres de u.

Exercice 9.

Pour chacune des matrices suivantes, étudier la diagonisabilité dans $\mathbf{C}$. Lorsque c'est possible, diagonaliser la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 & -1+2\mathrm{i} \\ 2 & 3+\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.

Diagonaliser la matrice $(1)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice 11.

Discuter de la diagonisabilité des matrices suivantes en fonction du paramètre $m \in \mathbf{R}$. Lorsque cela est possible, diagonaliser la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ m^2-7m & m-7 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{K})$. Diagonaliser A et en déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 13.

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$.

1. Diagonaliser A.
2. En déduire $B \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 14.

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = v$.

Exercice 15.

Montrer que l'application $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longmapsto M^\top$ est diagonalisable.

Exercice 16.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Soit

$$\mathscr{C} = \{v \in \mathscr{L}(E), \ u \circ v = v \circ u\}.$$

1. Vérifier que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes. Justifier que
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u - \lambda_i \operatorname{id}_E).$$
3. Soit $v \in \mathscr{C}$. Montrer que v laisse stable les sous-espaces propres de u.
4. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note $n_i = \dim(\ker(u - \lambda_i \operatorname{id}_E))$. Montrer que
$$\dim(\mathscr{C}) = \sum_{i=1}^{r} n_i^2.$$

Exercice 17.

Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Comparer leurs spectres, leurs rangs, leurs traces, ainsi que la dimension des sous-espaces propres.
2. Sont-elles semblables ?

Exercice 18.

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A et T sont semblables.

Exercice 19.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A et T sont semblables.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 20.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{K}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Soit $u_1 = e_1 + e_2$. Calculer $f(u_1)$. Que peut-on en déduire pour u_1 ?
   (b) Montrer que 1 est l'unique valeur propre de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Bijectif ?
2. Soient u_2 et u_3 deux éléments de $\mathbf{K}^3$ avec $u_2 = pe_2 + qe_3$ et $u_3 = re_1 + se_3$ où $(p, q, r, s) \in \mathbf{K}^4$
   (a) Déterminer u_2 et u_3 pour que
$$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2u_2 + u_3.$$

(b) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{K}^3$.
(c) Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.
(d) Calculer A'^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
(e) En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 21.

Donner un explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans chacun des cas suivants.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$ avec $u_0 = u_1 = 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 2u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$.
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n + 3$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On pose $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

1. Calculer D_1 et D_2.
2. En faisant des opérations sur les lignes/colonnes, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. En déduire que pour tout $n \geq 3$, $D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$.
4. En déduire l'expression de D_n pour $n \in \mathbf{N}^\star$.