La topologie, là où on ne l'attend pas

Erik Thomas *

Résumé

Dans cette note, nous montrons qu'il n'existe pas de suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ de réels positifs telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, de somme égale à S et telle que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}^\star) & \to & [0,S] \\ J & \mapsto & \sum_{n\in J} a_n \end{array}$ soit bijective.

1 Introduction

Le point de départ de cette note est la proposition très classique suivante.

Proposition 1.1. *Pour tout $x \in [0,1]$, il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^\star}$ telle que $x = \sum_{n\in\mathbf{N}^\star} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$. Autrement dit, l'application $\kappa : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}^\star) & \to & [0,1] \\ J & \mapsto & \sum_{n\in J} \frac{1}{2^n} \end{array}$ est surjective.*

Il est classique que κ n'est pas injective car $\kappa(\{1\}) = \kappa(\{2,3,\ldots\}) \left(= \frac{1}{2}\right)$. Ce défaut d'injectivité de κ n'est généralement pas gênant car le défaut d'injectivité de κ se produit sur un nombre dénombrable d'éléments de $[0,1]$.

On peut néanmoins se poser la question suivante : existe-t-il une suite de réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, de somme égale à S et telle que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}^\star) & \to & [0,S] \\ J & \mapsto & \sum_{n\in J} a_n \end{array}$ soit bijective ?

Nous allons répondre à cette question par la négative et établir la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Il n'existe pas de suite de réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ sommable de somme égale à S, telle que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}^\star) & \to & [0,S] \\ J & \mapsto & \sum_{n\in J} a_n \end{array}$ soit bijective.*

Si une telle suite existe, on montrera alors que φ est nécessairement un homéomorphisme (pour une topologie sur $\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star)$ précisée ci-dessous) puis, on montrera « à la main » que φ^{-1} ne peut être continue et on obtiendra une contradiction.

2 Preuve du résultat principal

Pour faciliter la lecture, nous avons décidé de scinder la preuve de la proposition 1.2 en plusieurs propositions.

Dans toute cette partie, nous supposons qu'une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ existe. Notons que la bijectivité de φ (l'injectivité suffit) entraîne que $a_n > 0$ pour $n \in \mathbf{N}^\star$ et que les a_n sont deux à deux distincts. Quitte à renuméroter les a_n, on suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est décroissante.

* `erik.thomas@ens-rennes.fr`

Définition 2.1. *On définit sur* $\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star)^2$ *l'application* d *par :*

$$\forall (I,J) \in \mathscr{P}(\mathbf{N}^\star)^2, \quad \mathrm{d}(I,J) := \sum_{n \in I\Delta J} a_n,$$

où $I\Delta J$ *est la différence symétrique définie par* $I\Delta J := (I \cup J) \setminus (I \cap J)$.

On rappelle la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Si* A, B *et* C *sont trois ensembles. Alors* $A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.

Bien qu'accessible à un étudiant de première année, nous faisons la preuve par soucis d'exhaustivité.

Démonstration. Soit $x \in A\Delta C$, donc $x \in A \cup C$ et $x \notin A \cap C$.

- On suppose que $x \in B$.
  - ⋆ Si $x \in A$, alors $x \notin C$. Il s'ensuit que $x \in B\Delta C$, puis $x \in (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.
  - ⋆ Le cas où $x \in C$ se traite comme le cas précédent.
- On suppose que $x \notin B$.
  - ⋆ Si $x \in A$, on a $x \in A\Delta B$, puis $x \in (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.
  - ⋆ Le cas où $x \in C$ se traite comme le cas précédent.

□

La proposition suivante est le point clef de la preuve de la proposition 1.2.

Proposition 2.2. $(\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star), \mathrm{d})$ *est un espace métrique compact.*

Démonstration.

- ⋆ La symétrie et le fait que $\mathrm{d}(I,J) = 0$ entraîne $I = J$ sont clairs.
  - ⋆ Soient I, J et K trois éléments de $\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star)$. D'après le lemme 2.1, on a : $I\Delta K \subset (I\Delta J) \cup (J\Delta K)$. Par positivité de a_n, on peut écrire :

$$\mathrm{d}(I,K) = \sum_{n \in I\Delta K} a_n \leq \sum_{n \in (I\Delta J)\cup(J\Delta K)} a_n \leq \sum_{n \in I\Delta J} a_n + \sum_{n \in J\Delta K} a_n = \mathrm{d}(I,J) + \mathrm{d}(J,K).$$

  Il s'ensuit que $(\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star), \mathrm{d})$ est un espace métrique.
- On munit $\{0,1\}^{\mathbf{N}^\star}$ de la topologie produit. Soit l'application $\psi : \{0,1\}^{\mathbf{N}^\star} \to \mathscr{P}(\mathbf{N}^\star)$ définie par :

$$\forall u \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^\star}, \quad \psi(u) = \{m \in \mathbf{N}^\star,\ u_m = 1\}.$$

  Il est clair que φ ainsi définie est bijective.
  Soit $u \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^\star}$ et soit $(u_p)_{p \in \mathbf{N}^\star}$ telle que $\lim_{p \to +\infty} u_p = u$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbf{N}^\star$ tel que $\sum_{n \geq N} a_n \leq \varepsilon$.
  Par définition de la topologie produit, pour tout $m \in \mathbf{N}^\star$, $\lim_{p \to +\infty} u_p(m) = u(m)$. Ainsi, comme $\{0,1\}$ est muni de la distance discrète, il existe $N' \in \mathbf{N}^\star$ tel que pour tout $p \geq N'$, pour tout $m \in [\![1, N-1]\!]$, $u_p(m) = u(m)$. Ainsi, pour tout $p \geq N'$, on a :

$$\mathrm{d}(\varphi(u_p), \varphi(u)) = \sum_{n \in \varphi(u_p)\Delta\varphi(u)} a_n \leq \sum_{n \geq N} a_n \leq \varepsilon.$$

  On en déduit que ψ est continue sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}^\star}$. Or, d'après le théorème de Tychonoff, $\{0,1\}^{\mathbf{N}^\star}$ est compact, donc $\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star) = \psi(\{0,1\}^{\mathbf{N}^\star})$ l'est aussi.

□

Proposition 2.3. *L'application* φ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. • On sait déjà que φ est bijective, montrons que φ est continue. Pour tous éléments I et J de $\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star)$, on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi(I)-\varphi(J)| &= \left|\sum_{n\in I} a_n - \sum_{n\in J} a_n\right| \\
&= \left|\sum_{n\in I\setminus(I\cap J)} a_n - \sum_{n\in J\setminus(I\cap J)} a_n\right| \\
&\leq \sum_{n\in I\setminus(I\cap J)} a_n + \sum_{n\in J\setminus(I\cap J)} a_n \\
&\leq \sum_{n\in I\Delta J} a_n \\
&\leq \mathrm{d}(I,J).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que φ est Lipschitz, donc continue.

• φ est une bijection continue entre deux compacts, il s'ensuit que φ^{-1} est continue, donc φ est un homéomorphisme. Nous renvoyons à [1] pour une preuve de ce résultat de topologie générale.

□

Nous pouvons terminer la preuve de la proposition 1.2.

Démonstration. On remarque que $\varphi^{-1}(a_1)=\{1\}$ et pour tout $x\in[0,a_1[$, $1\notin\varphi^{-1}(x)$ car sinon, on aurait $x>a_1$. Par définition de d, on a :

$$\forall x\in[0,a_1[,\quad \mathrm{d}\left(\varphi^{-1}(a_1),\varphi^{-1}(x)\right)=\sum_{n\in\varphi^{-1}(a_1)\Delta\varphi^{-1}(x)} a_n\geq a_1.$$

En particulier, $\lim\limits_{x\to a_1^-}\mathrm{d}\left(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(a_1)\right)\neq 0$, donc φ^{-1} n'est pas continue en a_1, ce qui contredit le résultat de la proposition 2.3 et conclut la preuve de la proposition 1.2.

□

La preuve proposée ici ne semble pas s'adapter si l'on suppose seulement φ injective ou surjective, on peut néanmoins énoncer la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Si φ est injective, alors $\varphi(\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star))$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

En particulier, $\varphi(\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star))$ est d'intérieur vide.

Démonstration. Comme φ est continue et $\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star)$ est compact, on en déduit que $\varphi(\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star)$ est homéomorphe à $\mathscr{P}(\mathbf{N}^\star)$, lui-même étant homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbf{N}^\star}$ d'après la proposition 2.2. Or, il est classique que $\{0,1\}^{\mathbf{N}^\star}$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

□

Corollaire 2.1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite de réels strictement positifs telle que pour tout $n\in\mathbf{N}^\star$, $a_n>\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k$. Alors, l'ensemble $\left\{\sum_{n\in J}a_n,\ J\subset\mathbf{N}^\star\right\}$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

Démonstration. D'après la proposition 2.4, il suffit de prouver que φ est injective. Soient J et J' deux parties de $\mathbf{N}^\star$ telles que $\varphi(J)=\varphi(J')$. On a donc

$$\sum_{n\in J}a_n=\sum_{n\in J'}a_n\Leftrightarrow\sum_{n\in J\setminus(J\cap J')}a_n=\sum_{n\in J'\setminus(J\cap J')}a_n.$$

On note que $(J\backslash(J\cap J'))\cap(J'\backslash(J\cap J'))=\varnothing$. On suppose par exemple que $J\backslash(J\cap J')\neq\varnothing$ et que $p:=\max J\backslash(J\cap J')>\max J'\backslash(J\cap J')$ (en convenant que, si $J'\backslash(J\cap J')=\varnothing$, alors $\max J'\backslash(J\cap J')=-\infty$). Par hypothèse, on a :

$$\sum_{n\in J\backslash(J\cap J')} a_n \geq a_p > \sum_{k=p+1}^{+\infty} a_k \geq \sum_{n\in J'\backslash(J\cap J')} a_n,$$

ce qui donne une contradiction.

□

Références

[1] L. Schwartz, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, 2008.