

Sur les points équidistants entre un convexe compact et un point du plan

Erik Thomas*

Résumé

Dans cet article, nous nous intéressons aux points équidistants entre un corps strictement convexe C de \mathbf{R}^2 (voir définition 1.2) et un point n'appartenant pas à ce convexe. Plus précisément, nous montrons que cet ensemble le graphe d'une fonction dont la régularité dépend de celle du bord de C . Nous montrons également que cet ensemble n'est pas borné. En partie 4, nous traitons un exemple : le cas des points équidistants entre un disque et un point.

1 Introduction

1.1 Rappels sur la convexité

Dans tout cet article, on se place dans \mathbf{R}^2 muni de sa structure euclidienne usuelle. Toutes les distances s'entendent donc par rapport à la norme qui dérive du produit scalaire. Cela vaut en particulier pour les projections.

Dans cette sous-partie, nous faisons quelques rappels sur des définitions et propriétés classiques relatives aux convexes.

Définition 1.1. Soit $C \subset \mathbf{R}^2$ un compact non vide. On dit que C est convexe (resp. strictement convexe) si pour tout $(x, y) \in C^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in C$ (resp. si pour tout $(x, y) \in C^2$, pour tout $t \in]0, 1[$, $(1-t)x + ty \in \text{int}(C)$ (l'intérieur de C)).

Remarque 1. Un compact strictement convexe est évidemment un compact convexe.

La notion qui nous intéressera est celle de corps convexe.

Définition 1.2. Corps convexe

On appelle corps convexe (resp. strictement convexe) tout compact convexe (resp. strictement convexe) d'intérieur non vide de \mathbf{R}^2 .

La définition suivante est très classique.

Définition 1.3. Fonction convexe, concave

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

(i) On dit que f est convexe (resp. strictement convexe) sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

resp.

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in]0, 1[, f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y).$$

(ii) Une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur un intervalle I est concave (resp. strictement concave) si $-f$ est convexe (resp. strictement convexe).

L'intérêt des fonctions convexes/concaves est qu'elles permettent de paramétrer le bord d'un convexe. Nous utiliserons la définition suivante qui permet de donner un agréable dans lequel paramétrer le bord d'un corps convexe.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

Définition 1.4. *Bord régulier*

Un corps convexe C de \mathbf{R}^2 est à bord régulier si tout point de ∂C admet une tangente (et donc une normale extérieure).

La notion de bord régulier permet de caractériser simplement le projeté sur un convexe.

Proposition 1.1. Soit C un corps de \mathbf{R}^2 dont le bord est régulier. Alors, pour tout $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$, en notant $p_C(M)$ le projeté de M sur C , le vecteur $\overrightarrow{Mp_C(M)}$ est colinéaire à la normale extérieure normalisée \vec{n}_A . En particulier, la droite $(Mp_C(M))$ est orthogonale à la tangente en $p_C(M)$.

La preuve est classique et est renvoyée par exemple à [1].

Définition 1.5. *Repère adapté à un point*

Soit C un corps convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est régulier et soit $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$. On note $O := p_C(M)$ la projection de M sur C . Le repère $(O, \vec{m}_O, -\vec{n}_O)$, où \vec{n}_O est la normale extérieure normalisée et \vec{m}_O est choisi de sorte que le repère soit orthonormé direct, est appelé repère adapté à M .

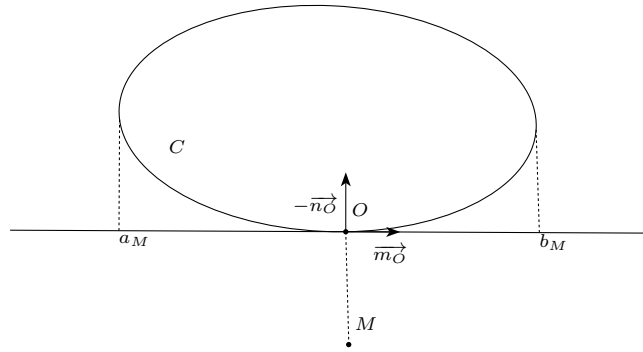


FIGURE 1 – Un exemple de repère adapté.

L'intérêt des repères adaptés est qu'ils forment des repères « maximaux » dans lesquels il est simple de paramétrer le bord d'un convexe. Plus précisément, on a :

Proposition 1.2. *Équation du bord dans un convexe dans un repère adapté*

Soit C un corps strictement convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est régulier. Soit $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$. Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) le repère adapté à M . On note $[a_M, b_M]$ la projection de C sur l'axe $(O\vec{i})$. Alors il existe deux fonctions $f, g : [a_M, b_M] \rightarrow \mathbf{R}$ respectivement strictement convexe et strictement concave telles, pour tout $A \in \partial C$, il existe $t \in [a_M, b_M]$ unique tel que A ait pour coordonnées $(t, f(t))$ ou $(t, g(t))$. On a de plus, $f(a_M) = g(a_M)$, $f(b_M) = g(b_M)$ et pour tout $t \in]a_M, b_M[$, $f(t) < d(t) < g(t)$ où $d(t) := \frac{f(b_M) - f(a_M)}{b_M - a_M}t + \frac{b_M f(a_M) - a_M f(b_M)}{b_M - a_M}$.

Démonstration. Toutes les coordonnées s'entendent dans le repère adapté à M .

- Si $t \in [a_M, b_M]$, on pose M_t le point de coordonnées $(t, 0)$. On pose $f(t) := d(M_t, p_C(M_t))$. Soient t_1 et t_2 deux éléments de $[a_M, b_M]$, avec par exemple $t_1 \leq t_2$. On note A_1 et A_2 les points de coordonnées $(t_1, f(t_1))$ et $(t_2, f(t_2))$. Comme C est strictement convexe, l'ensemble $]A_1 A_2[$ est inclus dans $\text{int}(C)$, donc

$$\forall t \in]0, 1[, \quad f((1-t)t_1 + t_2) < (1-t)f(t_1) + tf(t_2),$$

donc f est strictement convexe.

- Soit, pour $t \in [a_M, b_M]$, $d(t) := \frac{f(b_M) - f(a_M)}{b_M - a_M}t + \frac{b_M f(a_M) - a_M f(b_M)}{b_M - a_M}$. d paramétrise le segment compris entre les points A et B de coordonnées respectives $(a_M, f(a_M))$ et $(b_M, f(b_M))$. Par stricte convexité de C , $]AB[\subset \text{int}(C)$, donc pour tout $t \in]a_M, b_M[$, $f(t) < d(t)$.
- Pour $t \in [a_M, b_M]$, on pose $g(t) := \sup \{y \geq d(t), (t, y) \in C\}$. Notons que g est bien définie car C est borné. Comme C est un corps convexe, pour tout $t \in [a_M, b_M]$, pour tout $y \in [d(t), g(t)]$, $(t, y) \in C$

et par définition de $g(t)$, pour tout $y > g(t)$, $(t, y) \notin C$, on en déduit que $(t, g(t)) \in \partial C$. Par stricte convexité de C , pour tout $t \in]a_M, b_M[$, $g(t) > d(t)$. Soient t_1 et t_2 deux éléments de $]a_M, b_M[$, soit aussi $t \in]0, 1[$. Comme C est strictement convexe, le point de coordonnées $(t, (1-t)g(t_1) + tg(t_2))$ appartient à $\text{int}(C)$, donc $g(t) > (1-t)g(t_1) + tg(t_2)$. Ainsi, g est strictement concave sur $]a_M, b_M[$.

- Soit $A \in \partial C$. Supposons que A n'appartienne pas au graphe de f , montrons que D appartient au graphe de g . On note (x_D, y_D) les coordonnées de D . Comme D n'appartient pas au graphe de f , $y_D > f(x_D)$. C étant strictement convexe, le segment ouvert reliant les points de coordonnées $(x_D, f(x_D))$ et $(x_D, g(x_D))$ est inclus dans $\text{int}(C)$. Enfin, pour tout $y > g(x_D)$, le point de coordonnées $(x_D, y) \notin C$, donc $y_D = g(x_D)$. Il s'ensuit que le point D appartient au graphe de g .
- On notera que l'intersection des graphes de f et de g est réduite aux points de coordonnées $(a_M, f(a_M))$ et $(b_M, f(b_M))$.

□

Dans la suite, les fonctions f et g ainsi définies seront notées f_M et g_M et seront appelées fonctions adaptées à M .

Remarque 2. Comme une fonction convexe change au plus une fois de monotonie, on remarque que la fonction f_M ainsi définie est strictement décroissante sur $]a_M, 0[$ et strictement croissante sur $]0, b_M[$. De même, la fonction g_M ainsi définie est strictement croissante sur $]a_M, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, b_M[$.

Définition 1.6. *Corps convexe à bord \mathcal{C}^k*

Soit C un corps convexe de \mathbf{R}^2 . On dit que le bord de C est de classe \mathcal{C}^k ($k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$) pour tout $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$, les fonctions f_M et g_M sont de classe \mathcal{C}^k sur $]a_M, b_M[$.

L'intérêt principal de cette définition est d'assurer la continuité de l'application $A \in \partial C \mapsto \vec{n}_A$ pour un corps convexe \mathbf{R}^2 dont le bord est de classe \mathcal{C}^1 .

1.2 But de cet article

Le point de départ de cet article est la recherche des points équidistants entre un corps convexe C et un point n'appartenant pas à C . Nous allons établir le résultat suivant.

Proposition 1.3. *Soit C un corps strictement convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est de classe \mathcal{C}^k ($k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$). Soit M un point n'appartenant pas à C . L'ensemble des points équidistants à C et M est le graphe non borné d'une fonction bijective de classe \mathcal{C}^k définie sur $]0, 1[$.*

Dans la partie 2, nous allons donner quelques résultats qui serviront dans la preuve de la proposition 1.3 (partie 3). Enfin, en partie 4, nous traitons un exemple : celui des points équidistants entre un point et un disque.

2 Résultats intermédiaires

2.1 Un résultat géométrique élémentaire

Le point clé de la preuve de la proposition 1.3 est le résultat élémentaire suivant.

Lemme 2.1. *Soit D une demi-droite du plan issue d'un point C et soit M un point plan différent de C . On note D' le prolongement de la demi-droite D en une droite.*

- Si la projection orthogonale de M sur la droite D' appartient à $D \setminus \{C\}$, alors il existe un unique point $H \in D$ tel que $CH = MH$.
- Si la projection orthogonale de M sur la droite D' appartient à $(D' \setminus D) \cup \{C\}$, alors il n'existe pas de point $H \in D$ tel que $CH = MH$.

Démonstration. Le cas où $M \in D$ est évident, le point équidistant correspond alors au milieu du segment $[CM]$. On suppose dans la suite de la preuve que $M \notin D$.

Quitte à composer par une similitude, on peut supposer que C a pour coordonnées $(0, 0)$, D est la demi-droite d'inéquation $x \geq 0$ et que M a pour coordonnées (a, b) .

- On suppose $a > 0$. Il s'ensuit que la projection orthogonale de M sur D' appartient à D . Pour $x \geq 0$, on introduit $P_x \in D$ le point de coordonnées $(x, 0)$. Soient aussi

$$f(x) := d(P_x, M) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} \quad \text{et} \quad g(x) := d(C, P_x) = x.$$

On a :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-a)^2 + b^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Ainsi, le point de coordonnées $\left(\frac{a^2 + b^2}{2a}, 0\right)$ est équidistant aux points C et M .

- On suppose $a = 0$. Le projeté orthogonal de M sur D' est le point C . Le théorème de Pythagore assure que pour tout $H \in D \setminus \{C\}$, on a :

$$d(M, H)^2 = d(C, H)^2 + d(C, M)^2 > d(C, H)^2$$

car $d(C, M)^2 > 0$ car $M \notin D$.

- On suppose $a < 0$. Pour tout $H(x, 0) \in D \setminus \{C\}$, on a :

$$d(M, C) = \sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{(x-a)^2 + b^2},$$

car $a < 0$. Il s'ensuit qu'il n'existe pas de point $H \in D$ tel que $CH = MH$.

□

Remarque 3. Une étude un peu plus attentive de la preuve précédente permet de se convaincre que, lorsque le projeté orthogonal de M sur la droite D' appartient à $D \setminus \{C\}$, alors les coordonnées du point équidistant dépendent de manière \mathcal{C}^∞ des coordonnées de M et C .

2.2 Sur les points visibles

Définition 2.1. *Point visible*

Soit C un corps convexe de \mathbf{R}^2 . Soit $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$. Un point $A \in \partial C$ est dit M -visible (ou simplement visible s'il n'y a pas d'ambiguïté) si $[AM] \cap C = \{A\}$.

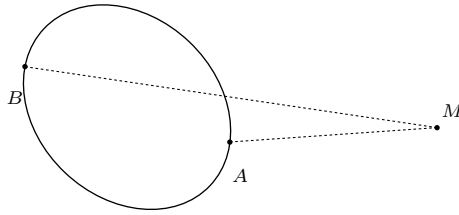


FIGURE 2 – Le point A est visible, alors que le point B ne l'est pas.

Remarque 4. L'ensemble des points visibles n'est pas vide. Par exemple, le projeté de M sur C est visible.

La proposition permet de donner une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'un point du bord d'un corps convexe à bord \mathcal{C}^1 .

Proposition 2.1. *Caractérisation des points visibles*

Soit C corps strictement convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est \mathcal{C}^1 . Soit $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$.

Un point $A \in \partial C$ est visible si, et seulement si, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n_A})$ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, où $\overrightarrow{n_A}$ désigne le vecteur normal extérieur normalisé à ∂C en A .

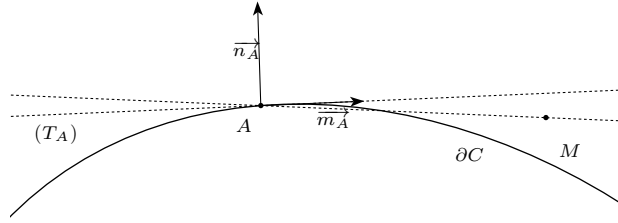


FIGURE 3 – Schéma de la situation.

Démonstration. (\Rightarrow) Soit (T_A) la tangente à ∂C passant par A . Montrons que C et M sont situés de part et d'autre de (T_A) . Supposons que C et M sont situés dans le même demi-plan delimité par (T_A) . On suppose en outre que $M \notin (T_A)$.

On se place dans le repère orthonormé direct $(A, \vec{m}_A, \vec{n}_A)$ où \vec{n}_A est la normale extérieure et \vec{m}_A est un vecteur directeur de (T_A) . Sur un voisinage de A , ∂A est le graphe d'une fonction $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}$ strictement concave dans le repère $(A, \vec{m}_A, \vec{n}_A)$. On note que, dans le repère $(A, \vec{m}_A, \vec{n}_A)$, $\gamma(0) = 0$ et $\gamma'(0) = 0$.

Comme M et C sont situés dans le même demi-plan et $M \notin (T_A)$, la droite (AM) a pour équation $y = ax$ avec $a \neq 0$ dans le repère $(A, \vec{m}_A, \vec{n}_A)$. Supposons $a > 0$ de sorte que M ait une abscisse positive. Le cas $a < 0$ se traite de manière analogue.

Supposons que le segment $[AM]$ et ∂C ne se coupent qu'en A . Alors, il existe par continuité, il existe $\eta > 0$ tel que, par exemple, pour tout $x \in]0, \eta]$, $\gamma(x) > ax$. Le cas où $\gamma(x) < ax$ se traite de manière analogue. Pour $x \in]0, \eta[$, on a $\frac{\gamma(x)}{x} > a$. En faisant tendre x vers 0, on a $\gamma'(0) \geq a > 0$, ce qui contredit le fait que $\gamma'(0) = 0$. Le cas où pour tout $x \in [-\eta, 0[$, $\gamma(x) > ax$ se traite de manière analogue.

Il s'ensuit que le segment $[AM]$ et ∂A se coupent en un autre point que A , ce qui contredit le fait que A est un point visible. Il s'ensuit que (T_A) sépare C et M . On note que A et M sont dans le même demi-plan. Il est alors clair qu'une mesure de l'angle (\vec{AM}, \vec{n}_A) appartient à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(\Leftarrow) Supposons que A ne soit pas visible. On commence par remarquer que C et M sont situés dans le même demi-plan delimité par (T_A) . En effet, si ce n'était pas le cas, comme C est convexe, on aurait le segment $[AM] \cap C = \{A\}$, ce qui contredit le fait que A n'est pas visible. Un même raisonnement montre, comme C est strictement convexe, M ne peut pas appartenir à (T_A) . Il s'ensuit qu'une mesure de l'angle (\vec{AM}, \vec{n}_A) appartient à $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ ou à $[-\pi, -\frac{\pi}{2}[$.

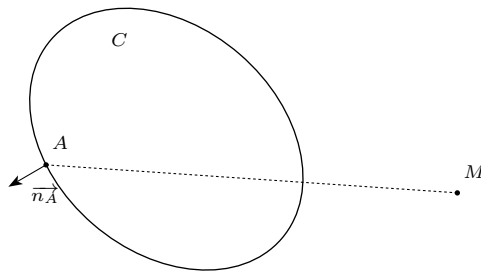


FIGURE 4 – Cas où A n'est pas visible.

□

Définition 2.2. *Point levant, point couchant*

Soit C un corps convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est \mathcal{C}^1 . Soit $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$.

Un point $A \in \partial C$ est dit *levant* (resp. *couchant*) si $(\vec{AM}, \vec{n}_A) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ (resp. si $(\vec{AM}, \vec{n}_A) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$).

Le preuve de la proposition 2.1 a montré le corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *Soit C un corps convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est de classe \mathcal{C}^1 . Soit $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$.*

Un point $A \in \partial C$ est visible (resp. visible et n'est ni un point couchant ou levant) si, et seulement si, (T_A) sépare (resp. sépare strictement) M et C .

La proposition suivante permet de donner des informations supplémentaires sur l'ensemble des points visibles.

Proposition 2.2. *Soit C un corps convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est de classe \mathcal{C}^1 . Soit $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$. On note \mathcal{V} l'ensemble des points visibles qui ne sont ni des points couchants, ni des points levants. Alors, \mathcal{V} est un ouvert de ∂C connexe par arcs.*

Avant de prouver la proposition 2.2, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2. *Soit C un corps strictement convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est \mathcal{C}^1 . Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) le repère adapté à M et f_M la fonction adaptée à M . Alors, l'ensemble des points M -visibles est inclus dans le graphe de f_M .*

Nous prouvons le lemme 2.2.

Démonstration. Supposons qu'il existe un point A visible hors du graphe de f_M . On note (x_A, y_A) les coordonnées de A et $(0, y_0)$ celles de M dans le repère adapté à M . D'après la proposition 1.2, A appartient au graphe de g_M . Toujours d'après la proposition 1.2, pour tout $x \in]a_M, b_M[$, $f_M(x) < d(x) < g(x)$, donc un simple argument de continuité assure que le segment $[AM]$ coupe le graphe de f_M en point B d'abscisse $x_B \in]a_M, b_M[$. On a $B \neq A$ car les graphes de f_M et g_M n'ont pas de point en commun sur l'intervalle $]a_M, b_M[$. □

Nous prouvons la proposition 2.2.

Démonstration. • D'après la proposition 2.1, on a :

$$\mathcal{V} = \left\{ A \in \partial C, \cos \left(\overrightarrow{AM}, \vec{n}_A \right) > 0 \right\}.$$

Par continuité de l'application $A \in \partial C \mapsto \cos \left(\overrightarrow{AM}, \vec{n}_A \right)$, on en déduit que \mathcal{V} est ouvert.

- Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) le repère adapté à M et f_M la fonction adaptée à M ; toutes les coordonnées s'entendent dans ce repère. Comme O est un point visible, pour montrer que \mathcal{V} , il suffit de montrer que tout élément de $A_1 \in \mathcal{V}$ est relié à O . Soit donc $A_1 \in \mathcal{V}$. Comme l'ensemble des points visibles est inclus dans le graphe de f_M , il existe $t_1 \in [a_M, b_M]$ tel que les coordonnées de A_1 soient $(t_1, f_M(t_1))$. Supposons par exemple $t_1 > 0$, le cas où $t_1 \leq 0$ est analogue. Supposons qu'il existe $t_2 \in]0, t_1[$ tel que le point A_2 de coordonnées $(t_2, f_M(t_2))$ n'appartienne pas à \mathcal{V} . On note $(0, y_0)$ les coordonnées de M . D'après le corollaire 2.1, (T_{A_1}) sépare strictement M et C donc $y_0 < -f'_M(t_1)t_1 + f_M(t_1)$ (« M est situé sous (T_{A_1}) »). Comme $A_2 \notin \mathcal{V}$, d'après la corollaire 2.1, M et C sont situés dans le même demi-plan délimité par (T_{A_2}) , donc $y_0 \leq f'_M(t_2)t_2 + f_M(t_2)$. On en déduit donc

$$-f'_M(t_2)t_2 + f_M(t_2) < -f'_M(t_1)t_1 + f_M(t_1).$$

Il s'ensuit que

$$f_M(t_2) - f_M(t_1) < f'_M(t_2)t_2 - f'_M(t_1)t_1 < f'_M(t_1)t_2 - f'_M(t_1)t_1 = f'_M(t_1)(t_2 - t_1) \quad (1)$$

car f' est strictement croissante sur $[a_M, b_M]$. Or, f_M est convexe, donc le graphe de f_M est situé au-dessus de ses tangentes, en particulier pour la tangente (T_{A_1}) , on a :

$$f_M(t_2) \geq f'_M(t_1)(t_2 - t_1) + f_M(t_1) \Leftrightarrow f_M(t_2) - f_M(t_1) \geq f'_M(t_1)(t_2 - t_1).$$

Cette inégalité n'est pas compatible avec l'inégalité de la ligne (1). On en déduit que tout point de coordonnées $(t, f_M(t))$ avec $t \in [0, t_1]$ appartient à \mathcal{V} . Par suite, \mathcal{V} est connexe par arcs. □

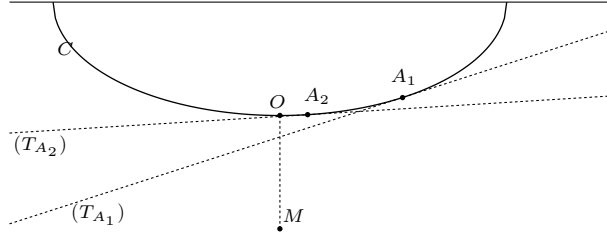


FIGURE 5 – Le point A_2 semble visible.

La proposition suivante est fondamentale pour la preuve de la proposition 1.3.

Proposition 2.3. *Sur les points équidistants*

Soit C un corps convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est \mathcal{C}^1 . Soit $M \in \mathbf{R}^2 \setminus C$.

Pour tout $A \in \partial C$, on note D_A la demi-droite issue de A et dirigée par \vec{n}_A . La demi-droite D_A contient un point équidistant entre C et M si, et seulement si, A est visible et n'est ni un point couchant ni un point levant.

Démonstration. (\Rightarrow) D'après le lemme 2.1, le projeté orthogonal de M sur le prolongement de la demi-droite D_A , notée D'_A , appartient également à $D_A \setminus \{A\}$. Il s'ensuit que (T_A) la tangente à ∂C en A sépare strictement M et C car sinon le projeté de M sur D'_A appartiendrait à $(D'_A \setminus D_A) \cup \{A\}$. Comme D_A est dirigée par \vec{n}_A , on en déduit qu'une mesure de l'angle (\vec{AM}, \vec{n}_A) appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc, d'après la proposition 2.1, A est visible et n'est ni un point levant ni un point couchant.

(\Leftarrow) D'après la proposition 2.1, une mesure de l'angle (\vec{AM}, \vec{n}_A) appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Il s'ensuit que le projeté orthogonal de M sur D'_A appartient à $D_A \setminus \{A\}$. D'après le lemme 2.1, il existe un point sur D_A équidistant entre A et M , donc équidistant entre C et M . □

3 Preuve de la proposition 1.3

On prouve la proposition 1.3.

Démonstration. Soient C corps strictement convexe de \mathbf{R}^2 et M un point du plan n'appartenant pas à C . Soit \mathcal{E} l'ensemble des points équidistants à C et M . On note aussi \mathcal{V} l'ensemble des points visibles privé des points levants et couchants.

- Soient d_C et d_M qui représentent respectivement les distances à C et M . Ces deux fonctions sont clairement continues. Comme $\mathcal{E} = \{P \in \mathbf{R}^2, d_C(P) = d_M(P)\}$, il s'ensuit que \mathcal{E} est un fermé.
- Soit \mathcal{V} l'ensemble des points visibles privé des points levants et couchants. D'après la proposition 2.2, \mathcal{V} un ouvert connexe par arcs : il existe une application $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathcal{V}$ bijective et de classe \mathcal{C}^k (car le bord est de classe \mathcal{C}^k). Soit l'application $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}$ où H_A est l'unique point point équidistant

$$A \mapsto H_A$$

à M sur la demi-droite issue de A dirigée par \vec{n}_A (l'unicité est assurée par la proposition 2.3). Toujours d'après la proposition 2.3, cette application est bijective, et d'après la remarque 3, les coordonnées de H_A dépendent de manière \mathcal{C}^∞ de celle de A . Soit enfin $\psi := \varphi \circ \gamma :]0, 1[\rightarrow \mathcal{E}$. Cette application est clairement bijective et est de classe \mathcal{C}^k .

- Montrons que \mathcal{E} n'est pas borné. Soit l'application $\varphi : A \in \partial C \mapsto \cos(\vec{AM}, \vec{n}_A)$. Comme $\varphi(M) = 1$ et $\varphi(N) < 0$ pour un point N qui n'est pas visible (voir proposition 2.1), par continuité φ s'annule et prend donc des valeurs positives arbitrairement petites. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ et soit A_ε tel que $\varphi(A_\varepsilon) = \varepsilon$. On se place dans le repère orthonormé $(A_\varepsilon, \vec{n}_{A_\varepsilon}, \vec{m}_{A_\varepsilon})$ avec \vec{n}_{A_ε} la normale extérieure normalisée. Comme $\cos(\vec{A_\varepsilon M}, \vec{n}_{A_\varepsilon}) = \varepsilon$, l'abscisse du projeté de M dans le repère précédent est $x_\varepsilon := d_\varepsilon \varepsilon$ et son ordonnée

est $y_\varepsilon := d_\varepsilon \sin(\overrightarrow{A_\varepsilon M}, \overrightarrow{n_{A_\varepsilon}})$ avec $d_\varepsilon := d(M, A_\varepsilon)$. D'après la preuve de le lemme 2.1, les coordonnées du point H_ε équidistant entre A_ε et M sont $\left(\frac{x_\varepsilon^2 + y_\varepsilon^2}{2x_\varepsilon}, 0\right)$. En notant $d := d(M, C)$ et en remarquant que $d_\varepsilon \geq d$, on a : $\frac{x_\varepsilon^2 + y_\varepsilon^2}{2x_\varepsilon} \geq \frac{d}{2\varepsilon}$. Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{d}{2\varepsilon} = +\infty$, on en déduit que \mathcal{E} n'est pas borné. \square

4 Exemple

Dans cette partie, on se propose de traiter un exemple. On s'intéresse aux points équidistants entre un disque et un point. Plus précisément, nous allons donner une équation explicite des points équidistants entre le disque D de centre O et de rayon 1 et le point M de coordonnées $(\sqrt{2}, 0)$.

Le repère orthonormé usuel est noté \mathcal{R} .

Il est clair que D est un corps strictement convexe de \mathbf{R}^2 dont le bord est de classe \mathcal{C}^1 . Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, on introduit M_θ le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, \vec{u}_θ le vecteur de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et \vec{v}_θ le vecteur de coordonnées $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$. On note \mathcal{R}_θ le repère (de Frenet) $(M_\theta, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$. La formule de changement de coordonnées entre ces deux repères est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\theta} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

L'ensemble des points visibles est l'ensemble $\{M_\theta, \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\}$. On fixe $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. Le point M a pour coordonnées $(\sqrt{2} \cos(\theta) - 1, -\sqrt{2} \sin(\theta))$ dans \mathcal{R}_θ . D'après la preuve de la proposition 2.1, les coordonnées du point équidistant H_θ entre M_θ et M sur la demi-droite issue de M_θ et dirigée par \vec{u}_θ sont (dans le repère \mathcal{R}_θ)

$$\left(\frac{(\sqrt{2} \cos(\theta) - 1)^2 + (-\sqrt{2} \sin(\theta))^2}{2(\sqrt{2} \cos(\theta) - 1)}, 0 \right) = \left(\frac{3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta)}{2(\sqrt{2} \cos(\theta) - 1)}, 0 \right).$$

Il s'ensuit que les coordonnées de H_θ sont dans \mathcal{R} :

$$\left(\frac{\cos(\theta)(3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta))}{2(\sqrt{2} \cos(\theta) - 1)} + \cos(\theta), \frac{\sin(\theta)(3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta))}{2(\sqrt{2} \cos(\theta) - 1)} + \sin(\theta) \right) = \left(\frac{\cos(\theta)}{2(\sqrt{2} \cos(\theta) - 1)}, \frac{\sin(\theta)}{2(\sqrt{2} \cos(\theta) - 1)} \right).$$

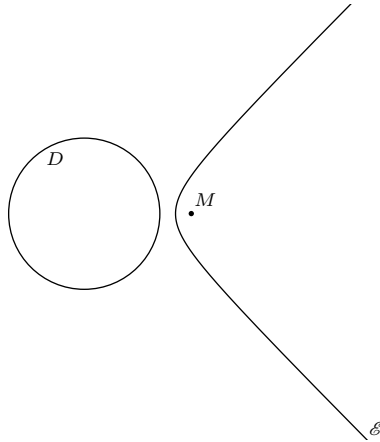


FIGURE 6 – L'ensemble des points équidistants entre D et M .

Remarque 5. On remarque la présence de deux droites asymptotes.

Références

- [1] R. Tyrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1997.