Chapitre 8 : Exercices

Exercice 1.

Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n} z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n n^n z^n$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^{4n}$;
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (2+\mathrm{i}n)\, z^n$;
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}n} z^{2n}$;
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n2^n} z^{3n}$;
10. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}$;
11. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$;
12. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n z^n$

où a_n est la n-ième décimale de $\sqrt{2}$ dans son développement décimal illimité propre.

Exercice 2.

On souhaite déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} z^n$.

1. Peut-on utiliser la règle de d'Alembert ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\dfrac{1}{n} \leq n^{(-1)^n} \leq n$.
3. En déduire le rayon de convergence recherché.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
2. En déduire $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
2. En déduire $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 5.

Soit $a \in \mathbf{R}_+^\star$. Donner le développement en série entière des fonctions suivantes en 0 en précisant le rayon de convergence.

1. $x \longmapsto a^x$;
2. $x \longmapsto \mathrm{e}^{a+x}$;
3. $x \longmapsto \ln(a+x)$;
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{a-x}$.

Exercice 6.

Donner le développement en série entière des fonctions suivantes en 0 en précisant le rayon de convergence.

1. $x \longmapsto \cos(x)\,\mathrm{e}^x$;
2. $x \longmapsto \cos(x)\sin(x)$;
3. $x \longmapsto \sin^3(x)$;
4. $x \longmapsto \ln\left(x^2-3x+2\right)$;
5. $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$;
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+5x-6}$;
7. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;
8. $x \longmapsto \ln\left(x^2+x+1\right)$;
9. $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$.

Exercice 7.

Soit $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

1. Calculer $1+\mathrm{j}^n+\mathrm{j}^{2n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}^2x}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 8.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)\,n!}$.

Exercice 9.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$
2. En déduire que
$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$
3. En déduire la valeur de $\mathrm{Arctan}^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 10.

1. Montrer que
$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \mathrm{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)\,4^n}x^{2n+1}.$$
2. En déduire le développement en série entière de Arcsin en 0 et préciser son rayon de convergence.
3. Montrer que l'on a
$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{16^n\,(2n+1)}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 11.

Soit, pour $n \in \mathbf{N}^\star$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et soit la série entière $S = \displaystyle\sum_{n\geq 1} H_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $1 \leq H_n \leq n$.
2. En déduire le rayon de convergence R de la série entière S. On note $S(x)$ sa somme pour $x \in \left]-R,R\right[$.
3. Pour $x \in \left]-R,R\right[$, calculer $(1-x)\,S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$ pour $x \in \left]-R,R\right[$.

Exercice 12.

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.
2. Donner une expression de $S(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 13.

Donner le rayon de convergence R et calculer la somme sur $\left]-R,R\right[$ des séries entières suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$;
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$;
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n+1} x^n$;
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$;
10. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} F_n x^n$

où $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

Exercice 14.

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^\star$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ telle que
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-1/x}.$$
3. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
4. Montrer que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 15.

Soit f une fonction développable en série entière en 0 et de rayon de convergence égal à $+\infty$. On écrit donc $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que
$$\forall m \in \mathbf{N},\ \forall r > 0, \quad 2\pi a_m r^m = \int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt} \mathrm{d}t.$$
2. Montrer que si f est bornée, alors f est constante.
3. On suppose que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) \in \mathbf{R}$. Montrer que f est constante.
Indication : On pourra admettre que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}f}$ est développable en série entière en 0 et son rayon est $+\infty$.