Sur l'aire des triangles duaux

Erik Thomas*

Résumé

Le but de cette courte note est de donner une relation simple entre l'aire d'un triangle et l'aire d'un trinagle dual obtenu en plaçant ses sommets sur les arêtes du traingle initial.

1 Introduction

Le point de départ de cette note est la question suivante : étant donné un triangle $T = A_1A_2A_3$ du plan affine, quelle est l'aire du triangle $T' = A_1'A_2'A_3'$ où A_i' est le milieu du segment $[A_iA_{i+1}]$? [1] Peut-on généraliser où A_i' est un barycentre de (A_i, t) et $(A_{i+1}, 1-t)$ avec $t \in [0,1]$?

Par commodité, nous allons poser la définition suivante.

Définition 1.1. *Triangle dual*

Soit $T = A_1A_2A_3$ un triangle du plan affine. Soit $t \in [0,1]$. On appelle le dual de T d'indice, noté T_t', le triangle $T_t' = A_1'A_2'A_3'$ avec pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $A_i' = tA_i + (1-t)A_{i+1}$.

Nous allons établir le résultat suivant.

Proposition 1.1. *Soient $T = A_1A_2A_3$ un triangle du plan. Soit $t \in [0,1]$ et soit T_t' le dual de T d'indice t. Alors, $\mathscr{A}(T_t') = (3t^2 - 3t + 1)\mathscr{A}(T)$.*

2 Preuve de la proposition 1.1

La preuve de la proposition 1.1 est courte. Le point clé est le résultat suivant.

Proposition 2.1. *Soit $P = A_1A_2A_3$ un triangle dont les sommets ont pour coordonnées (x_i, y_i). L'aire algébrique de T, notée $\mathscr{A}(T)$, est donnée par :*

$$\mathscr{A}(T) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i\right).$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}$, la proposition 2.1 se réécrit en $\mathscr{A}(T) = X^\top QY$ avec $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous passons à la preuve de la proposition 1.1.

Démonstration. Soit $t \in [0,1]$. Soit $T = A_1A_2A_3$ un triangle dont les sommets ont pour coordonnées (x_i, y_i). Par définition, les coordonnées du triangle dual d'indice t sont $X_t := \begin{pmatrix} tx_1 + (1-t)x_2 \\ tx_2 + (1-t)x_3 \\ tx_3 + (1-t)x_1 \end{pmatrix}$ et $Y_t :=$

*erik.thomas@ens-rennes.fr

1. L'addition des indices est modulo 3.

$\begin{pmatrix} ty_1 + (1-t)y_2 \\ ty_2 + (1-t)y_3 \\ ty_3 + (1-t)y_1 \end{pmatrix}$ puis, d'après la proposition 2.1, $\mathscr{A}(T'_t) = X_t^\top Q Y_t$. Par de simples calculs, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(T'_t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} tx_1 + (1-t)x_2 \\ tx_2 + (1-t)x_3 \\ tx_3 + (1-t)x_1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ty_1 + (1-t)y_2 \\ ty_2 + (1-t)y_3 \\ ty_3 + (1-t)y_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} tx_1 + (1-t)x_2 \\ tx_2 + (1-t)x_3 \\ tx_3 + (1-t)x_1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} (t-1)y_1 + ty_2 + (1-2t)y_3 \\ (1-2t)y_1 + (t-1)y_2 + ty_3 \\ ty_1 + (1-2t)y_2 + (t-1)y_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En notant que $t^2 + (1-t)(1-2t) = -\left((1-t)(t-1) + t(1-2t)\right) = 3t^2 - 3t + 1$ et en calculant le produit matriciel, on obtient :

$$\mathscr{A}(P'_t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 3t + 1) \sum_{i=1}^{3} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \left(3t^2 - 3t + 1\right) \mathscr{A}(T).$$

□

Références

[1] *Mathématiques d'école : Nombres, mesures et géométrie*, D. Perrin, Cassini, 2011.