Chapitre 6 : Réduction des endomorphismes

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On se donne un espace vectoriel E sur $\mathbf{K}$ de dimension finie $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1 Éléments propres et polynôme caractéristique

1.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Définition 1. *Valeur propre/vecteur propre.*

*Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On dit que λ est **valeur propre** s'il existe un vecteur x **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$. x est alors appelé un **vecteur propre** de f pour la valeur propre λ.*

Remarque 1. Un vecteur x de E non nul est vecteur propre, si et seulement si, la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(x)$ est stable par f.

Remarque 2. 0 est valeur propre de f si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$.

Exemple 1. Soit $u \in \mathbf{K}_2[X]$ défini par $u(P) = P + XP'$. On a $u\left(X^2\right) = 3X^2$, donc 3 est valeur propre de u et X^2 est un vecteur propre pour la valeur propre 3.

Définition 2. *Sous-espace propre.*

*Le **sous-espace propre** associée à une valeur propre $\lambda \in \mathbf{K}$ est le sous-espace vectoriel de E*

$$E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \{x \in E,\ f(x) = \lambda x\}.$$

Remarque 3. Si λ est une valeur propre de f, on remarque que $f_{|E_\lambda(f)} = \lambda \mathrm{id}_{E_\lambda(f)}$.

Remarque 4. Si 0 est valeur propre de f, alors $E_0(f) = \operatorname{Ker}(f)$.

Exemple 2. L'ensemble des solutions de l'équation $u(P) = 3P$ dans $\mathbf{K}_2[X]$ est $\operatorname{Vect}\left(X^2\right)$. Ainsi $E_3(f) = \operatorname{Vect}\left(X^2\right)$.

Définition 3. *Spectre d'un endomorphisme.*

*On appelle **spectre** de l'endomorphisme f, noté $\operatorname{Sp}(f)$, l'ensemble (éventuellement vide) des valeurs propres de f.*

Exemple 3. Toujours avec l'endomorphisme des exemples précédents, on peut montrer que $\operatorname{Sp}(u) = \{1, 2, 3\}$.

Proposition 1. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f, alors la somme $E_{\lambda_1}(f) + \cdots + E_{\lambda_p}(f)$ est directe.*

Démonstration. On procède par récurrence sur p.

Lorsque $p = 1$, le résultat est clair.

Supposons le résultat vrai pour $p \in \mathbf{N}^{\star}$ et montrons le pour $p+1$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ $(p+1)$ valeurs propres de f deux à deux distinctes.

Soit $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in E_{\lambda_1}(f) \times \cdots \times E_{\lambda_{p+1}}(f)$ tel que $x_1 + \cdots + x_{p+1} = 0$. On compose cette relation par $f - \lambda_{p+1}\mathrm{id}_E$ pour obtenir

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) x_1 + \cdots + (\lambda_1 - \lambda_{p+1}) x_p = 0.$$

Or, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_1 - \lambda_i) x_i \in E_{\lambda_i}(f)$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $(\lambda_1 - \lambda_i) x_i$.

Comme les valeurs propres sont supposées deux à deux distincts, on a $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$, d'où $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. De la relation $x_1 + \cdots + x_p + x_{p+1} = 0$, on en déduit alors facilement que $x_{p+1} = 0$.

□

Remarque 5. La proposition assure en particulier qu'une famille constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

1.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition 4. *Polynôme caractéristique.*
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est l'application $\chi_f : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \chi_f(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{id}_E - f).$$

Remarque 6. Le polynôme caractéristique de f est une fonction polynomiale de degré n dont le coefficient est égal à 1.

Exemple 4. Toujours avec l'endomorphisme des exemples précédents, on peut montrer que $\chi_u(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

Proposition 2. *Lien entre les valeurs propres et les racines du polynôme caractéristique.*
Les valeurs propres de l'endomorphisme f sont les racines dans $\mathbf{K}$ du polynôme caractéristique χ_f.

Démonstration. La remarque fondamentale est la suivante : comme E est de dimension finie, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des endomorphismes (repose sur le théorème du rang). On peut donc écrire :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\} \iff f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ n'est pas inversible} \iff \det(\lambda \mathrm{id}_E - f) = 0.$$

□

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 1. *Le spectre de f est fini et a au plus n éléments.*

Démonstration. D'après la proposition 2, les valeurs propres sont **les** racines du polynôme caractéristique. Or, d'après la remarque 6, le polynôme caractéristique est de degré n. D'après le théorème de Gauss-d'Alembert, χ_f a au plus n racines.

□

Définition 5. *Ordre de multiplicité des racines du polynôme caractéristique.*
L'ordre de multiplicité d'une valeur propre $\lambda \in \mathbf{K}$, notée $m_\lambda(f)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_f.

Exemple 5. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^3)$ défini par :

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z).$$

Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
Les valeurs propres de f sont donc 0 et 3, $m_0(f) = 2$, $m_3(f) = 1$ et les sous-espaces propres sont

$$E_0(f) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)) \quad \text{et} \quad E_3(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)).$$

Remarque 7. Il faut se garder de penser que, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $m_\lambda(f) = \dim(E_\lambda(f))$. On a cependant une inégalité.

Proposition 3. *Si $\lambda \in \mathbf{K}$ est valeur propre de f, on a*

$$1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq m_\lambda(f).$$

Démonstration. On traite séparemment les deux inégalités.

(i) L'inégalité $1 \leq \dim(E_\lambda(f))$.

(ii) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E_\lambda(f)$, que l'on complète (théorème de la base incomplète vu en TSI 1) en une base de E, notée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
On remarque que la matrice de f dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I}_p & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, 0 est la matrice nulle de $\mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbf{K})$. Ainsi, le polynôme caractfistique est de la forme

$$\forall x \in \mathbf{K}, \quad \chi_f(x) = \det\left(\begin{pmatrix} (x - \lambda)\mathrm{I}_p & A \\ 0 & x\mathrm{I}_{n-p} - B \end{pmatrix}\right).$$

En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\chi_f(x) = (x-\lambda)\det\left(\begin{pmatrix} (x-\lambda)\,\mathrm{I}_{p-1} & \widetilde{A} \\ 0 & x\mathrm{I}_{n-p} - B \end{pmatrix}\right)$$

où la matrice $\widetilde{A}$ est la matrice A à laquelle on a ôté sa première ligne. En réitérant $p-1$ fois ce processus (récurrence), on obtient

$$\forall x \in \mathbf{K}, \quad \chi_f(x) = (x-\lambda)^p \det(x\mathrm{I}_{n-p} - B).$$

Ainsi, λ est racine d'ordre au moins p du polynôme caractéristique, donc $p \leq \dim(E_\lambda(f))$.

□

Exemple 6. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbf{K}^3\right)$ défini par

$$f(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z).$$

On a $\chi_f(\lambda) = (\lambda-1)^3$, donc 1 est l'unique valeur propre de f et $m_1(f) = 3$. De plus,

$$E_1(f) = \mathrm{Vect}((1,0,0)).$$

1.3 Extension aux matrices

Toutes les définitions, tous les résultats de la sous-parties précédentes s'adaptent aux matrices.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Définition 6. (i) *On dit que $\lambda \in \mathbf{K}$ est **valeur propre** de M s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ non nul tel que $MX = \lambda X$.*

(ii) *On dit que $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est un **vecteur propre** de M si X est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $MX = \lambda X$.*

(iii) *Si $\lambda \in \mathbf{K}$ est une valeur propre de M, on définit $E_\lambda(M)$ le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ par $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda\mathrm{I}_n)$.*

(iv) *Le spectre de M, noté $\mathrm{Sp}(M)$, est l'ensemble des valeurs propres de M.*

(v) *Le polynôme caractéristique de la matrice M est l'application $\chi_M : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ définie par*

$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \chi_M(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I}_n - M).$$

Remarque 8. 0 est valeur propre de M si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(M) \neq \{0\}$. Le cas échéant, on a $E_0(M) = \mathrm{Ker}(M)$.

Proposition 4. *Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique χ_M.*

Démonstration. Adapter la preuve de la proposition 2.

□

Proposition 5. *Valeurs propres d'une matrice triangulaire.*
Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments sur la diagonale.

Démonstration. Soit M une matrice triangulaire dont on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments sur sa diagonale. Il est clair que, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, la matrice $\lambda\mathrm{I}_n - M$ est triangulaire, ainsi d'après un résultat sur le calcul des déterminants d'une matrice triangulaire, on a

$$\chi_M(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i).$$

Il est alors que les λ_i sont les racines de χ_M, donc d'après la proposition 4, ce sont les valeurs propres de M.
□

Définition 7. *Ordre de multiplicité d'une valeur propre.*
L'ordre de multiplicité d'une valeur propre $\lambda \in \mathbf{K}$, notée $m_\lambda(M)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_M.

Proposition 6. *Si $\lambda \in \mathbf{K}$ est valeur propre de M, on a*

$$1 \leq \dim \left(E_\lambda \left(M\right)\right) \leq m_\lambda \left(M\right).$$

Démonstration. Adapter la preuve de la proposition 3.

□

2 Endomorphismes et matrices diagonalisables

2.1 Cas des endomorphismes

Définition 8. *Endomorphisme diagonalisable.*
L'endomorphisme f est dit **diagonalisable** *s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.*

Remarque 9. La définition se reformule en : il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Exemple 7. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbf{K}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{C} = (e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$. Il est facile de remarquer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{K}^3$. Comme $f(e_1 - e_2) = f(e_1 - e_3) = 0$ et $f(e_1 + e_2 + e_3) = 3(e_1 + e_2 + e_3)$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

f est donc diagonalisable.

Proposition 7. *Lien entre diagonisabilité et sous-espace propre.*
L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, la somme de ses sous-espaces propres est égale à E, autrement dit, en utilisant la proposition 1, si et seulement si,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f).$$

Démonstration. On traite séparemment les deux implications.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les éléments du spectre de f. Soit $\mathscr{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(f)$. La famille $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de E car $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$.

D'après la remarque 3, $f_{E_{\lambda_i}(f)} = \lambda_i \,\mathrm{id}_{E_{\lambda_i}(f)}$ ainsi, en notant n_i la dimension de $E_{\lambda_i}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{n_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathrm{I}_{n_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{p-1} I_{n_{p-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_p \mathrm{I}_{n_p} \end{pmatrix}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice M est diagonale. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les éléments deux à deux distincts de la diagonale.

D'après la proposition 5, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de M, donc de f.

D'une part, comme $\mathscr{B}$ est une base, il est clair que $E_{\lambda_1}(f) + \dots + E_{\lambda_p}(f) = E$. D'autre part, en utilisant la proposition 1, on a $E_{\lambda_1}(f) + \dots + E_{\lambda_p}(f) = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$, ainsi

$$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(f).$$

□

Proposition 8. *Conditions nécessaires et suffisantes de diagonisabilité.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est diagonalisable ;*

(ii) *on a* $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) = \dim(E)$ *;*

(iii) *le polynôme caractéristique χ_f est scindé et*

$$\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(f),\quad \dim\left(E_\lambda(f)\right) = m_\lambda(f).$$

Démonstration. On va prouver que (i) $\Longrightarrow$ (ii), puis que (ii) $\Longrightarrow$ (iii) et enfin que (iii) $\Longrightarrow$ (i).

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ D'après la proposition 7, on peut écrire $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$. En particulier, on a $\dim(E) = \displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right)$.

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)}}$ On note $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes et on note $m_{\lambda_1}(f),\dots,m_{\lambda_p}(f)$ leurs ordres de multiplicité dans le polynôme caractéristique. Ainsi, on peut écrire

$$\forall\lambda\in\mathbf{K},\quad \chi_f(\lambda) = Q(\lambda)\prod_{i=1}^{p}(\lambda-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}(f)}$$

où Q est un polynôme de degré $n - \left(m_{\lambda_1}(f)+\dots+m_{\lambda_p}(f)\right)$.
D'après la proposition 3, on a

$$\dim\left(E_{\lambda_i}(f)\right) \le m_{\lambda_i}(f), \tag{1}$$

ainsi

$$n = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) \le \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} m_\lambda(f) \le n. \tag{2}$$

Il s'ensuit que les inégalités de (2) et donc de (1) sont toutes des égalités. En particulier, $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} m_\lambda(f) = n$, ainsi Q est degré 0 et

$$\forall\lambda\in\mathbf{K},\quad \chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{p}(\lambda-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}(f)}.$$

Ce qui prouve que χ_f est scindé.

$\boxed{\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ On note $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les racines de χ_f qui, d'après la proposition 2, sont les valeurs propres de f.
Comme $E_{\lambda_1}(f)+\dots+E_{\lambda_p}(f) = \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ (proposition 1), pour conclure, d'après la proposition 7, il suffit de prouver que $\dim\left(\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)\right) = n$. Pour cela, en utilisant l'hypothèse, on écrit

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)\right) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} m_\lambda(f) = n,$$

où la dernière égalité vient du fait que le polynôme caractéristique est supposé scindé et est de degré n (remarque 6), donc $n = \displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} m_\lambda(f)$.

$\square$

Exemple 8. On se propose d'étudier la diagonisabilité de l'endomorphisme f de $\mathbf{K}_2[X]$ défini par

$$\forall P\in\mathbf{K}_2[X],\quad f(P) = \left(X^2-1\right)P'' + (2X+1)P'.$$

On commence par remarquer que, si $P\in\mathbf{K}_2[X]$, alors $\left(X^2-1\right)P''\in\mathbf{K}_2[X]$ et $(2X+1)P'\in\mathbf{K}_2[X]$, donc $f(P)\in\mathbf{K}_2[X]$. La linéarité est claire. On a

$$f(1)=0,\ f(X)=2X+1 \text{ et } f\left(X^2\right) = 6X^3+2X-2.$$

Si l'on note $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbf{K}_2[X]$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6)$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2, 6\}$. Il nous reste à chercher les espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres.

(i) $\lambda = 0$. La matrice $0\mathrm{I}_3 - A = -A$ est de rang 2 et $\mathrm{Ker}(-A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, ainsi $E_0(f) = \mathrm{Vect}(1)$.

(ii) $\lambda = 2$. On a

$$2\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2 et, si l'on note que $C_1 + 2C_2 = 0$, $\mathrm{Ker}(2\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, d'où $E_2(f) = \mathrm{Vect}(1 + 2X)$.

(iii) $\lambda = 6$. On a

$$6\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2 et, si l'on note que $-C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 0$ (un effort !), $\mathrm{Ker}(8\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$, d'où $E_6(f) = \mathrm{Vect}\left(-1 + 2X + 4X^2\right)$.

On a $\dim(E_0(f)) + \dim(E_2(f)) + \dim(E_6(f)) = 3 = \dim\left(\mathbf{K}^3\right)$, on en déduit (proposition 8) que f est diagonalisable.

Corollaire 2. *Une condition suffisante de diagonisabilité.*

Si f admet n (on rappelle que n est la dimension de E) valeurs propres deux à deux à distinctes, alors f est diagonalisable.

Démonstration. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres de f. Notons, d'après le corollaire 1, ce sont les seules.

Déjà, d'après la proposition 1, on a

$$E_{\lambda_1}(f) + \cdots + E_{\lambda_n}(f) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f).$$

Comme $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs de f, on a : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geq 1$, ainsi

$$n \geq \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f)\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(f)) \geq \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

On en déduit que $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f)\right) = n$, donc $\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f) = E$. D'après la proposition 8, f est diagonalisable.

□

⚠Ce résultat donne une condition **suffisante** de diagonisabilité qui n'a rien de **nécessaire**.

Exemple 9. On se propose d'étudier la diagonisabilité de $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_2[X])$ défini par

$$\forall P \in \mathbf{K}_2[X], \quad f(P) = XP' + P(X+1).$$

Déjà, si $P \in \mathbf{K}_2[X]$, $XP' \in \mathbf{K}_2[X]$, donc $f(P) \in \mathbf{K}_2[X]$. La linéarité de f est claire.

Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbf{K}_2[X]$. Comme $f(1) = 1$, $f(X) = 2X+1$ et $f(X^2) = 3X^2 + 2X + 1$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Il s'ensuit que $\mathrm{Sp}(f) = \{1,2,3\}$.

f a trois valeurs propres dans $\mathbf{K}_2[X]$ de dimension 3, f est donc diagonalisable.

⚠Nous avons montré que f est diagonalisable, mais nous n'avons pas diagonalisé f (i.e. trouver les espaces propres associés) : ce n'était pas demandé.

2.2 Cas des matrices

Définition 9. *Matrices semblables.*

*Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.*

Remarque 10. On rappelle que deux matrices sont semblables si ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

Proposition 9. *Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*

i) *Si A et B sont semblables, alors χ_A et χ_B, en particulier,* $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.
ii) *On a $\chi_A = \chi_{A^\top}$.*

Démonstration. i) Comme A et B sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) \\ &= \det\left(\lambda PP^{-1} - PBP^{-1}\right) \\ &= \det\left(P(\lambda \mathrm{I}_n - B)P^{-1}\right) \\ &= \det(P)\det(\lambda \mathrm{I}_n - B)\det\left(P^{-1}\right) \\ &= \det(\lambda \mathrm{I}_n - B) \\ &= \chi_B(\lambda). \end{aligned}$$

1. Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a :

$$\begin{aligned} \chi_{A^\top}(\lambda) &= \det\left(\lambda \mathrm{I}_n - A^\top\right) \\ &= \det\left(\lambda \mathrm{I}_n^\top - A^\top\right) && \text{car } \mathrm{I}_n \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \\ &= \det\left((\lambda \mathrm{I}_n - A)^\top\right) && \text{par linéarité de la transposition} \\ &= \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) \\ &= \chi_A(\lambda). \end{aligned}$$

□

Définition 10. *Matrice diagonalisable.*

*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si elle semblable à une matrice diagonale.*

Les deux propositions suivantes sont les analogues de celles énoncées pour les endomorphismes.

Proposition 10. *Lien entre diagonisabilité et sous-espace propre.*

La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme de ses sous-espaces propres est égale à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, autrement dit, en utilisant la proposition 1, si et seulement si,

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A).$$

Démonstration. Adapter la preuve de la proposition 7. □

Proposition 11. *Conditions nécessaires et suffisantes de diagonisabilité.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *A est diagonalisable ;*

(ii) *on a* $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ *;*

(iii) *le polynôme caractéristique χ_A est scindé et*

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad \dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A).$$

Démonstration. Adapter la preuve de la proposition 8. □

Exemple 10. On se propose de montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ et de la diagonaliser.

On a $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$.

On remarque que 1 est racine évidente, on peut donc factoriser par $\lambda - 1$. En procédant par coefficients indéterminés (ou une autre méthode !), on a

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{1, -2, 3\}$. Cherchons maintenant les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

(i) $\lambda = 1$. On a

$$\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{I}_3 - A$ est de rang 2 car les deux premières colonnes sont égales et la troisième n'est pas colinéaires aux deux premières, ainsi son noyau est de dimension 1 et $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, d'où $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(ii) $\lambda = -2$. On a

$$-2\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$-2\mathrm{I}_3 - A$ est de rang 2 car les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires et $2C_1 - 2C_2 + 3C_3 = 0$. Ainsi son noyau est de dimension 1 et $\mathrm{Ker}(-2\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, d'où $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

(iii) $\lambda = 3$. On a

$$3\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si on ne voit pas clairement de combinaison linéaire annulant les colonnes, on résout le système. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{K})$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ -x + y - 2z &= 0 \\ -2x - 2y + 5z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ -4y + 9z &= 0 \end{cases} \quad \text{en faisant } L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1 \\
&\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{4} z \\ y &= \frac{9}{4} z \\ z \in \mathbf{K} \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

Comme $\dim(E_1(A)) + \dim(E_{-2}(A)) + \dim(E_3(A)) = 3$, on en déduit que A est diagonalisable. De plus, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Corollaire 3. *Une condition suffisante de diagonisabilité.*
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ a n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Démonstration. Adapter la preuve du corollaire 2. □

3 Endomorphismes et matrices trigonalisables

3.1 Cas des endomorphismes

Définition 11. *Endomorphisme trigonalisable.*
*f est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice est triangulaire supérieure.*

Remarque 11. Une matrice diagonale étant triangulaire supérieure, un endomorphisme diagonalisable est donc trigonalisable.

Proposition 12. *Caractérisation des endomorphismes trigonalisables.*
f est trigonalisable si, et seulement si, χ_f est scindé sur $\mathbf{K}$.

Démonstration. Admis. □

Corollaire 4. *Trigonalisation lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.*
Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable.

Démonstration. Comme χ_f est un polynôme de degré $n \neq 0$, le théorème de Gauss-d'Alembert assure que χ_f est scindé, donc d'après la proposition 12, f est trigonalisable.

$\square$

Proposition 13. *Déterminant et trace d'un endomorphisme trigonalisable.*
On suppose f trigonalisable. En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres ***comptées avec leurs ordres de multiplicité****, alors*

$$\mathrm{Tr}\,(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \textit{et} \quad \det\,(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base dans laquelle la matrice M de f est triangulaire supérieure, dont on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments sur la diagonale. D'après la proposition 5, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de M, donc de f.

Or, le calcul du déterminant et de la trace ne dépendent pas de la base choisie, comme le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments sur la diagonale et par définition de la trace, on a :

$$\mathrm{Tr}\,(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det\,(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

$\square$

Exemple 11. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbf{K}^3\right)$ défini par

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbf{K}^3, \quad f\,(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z)\,.$$

On a $\chi_f\,(\lambda) = (\lambda-1)^2\,(\lambda-4)$. Il s'ensuit que 1 et 4 sont les valeurs propres de f et $m_1\,(f) = 2$ et $m_4\,(f) = 1$. On en déduit que

$$\mathrm{Tr}\,(u) = 1+1+4 = 6 \quad \text{et} \quad \det\,(u) = 1 \times 1 \times 4 = 4.$$

Corollaire 5. *Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, les résultats de la proposition 13 sont vrais pour tout endomorphisme de E.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le corollaire 4 et la proposition 13.

$\square$

3.2 Cas des matrices

Définition 12. *Matrice trigonalisable.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n\,(\mathbf{K})$. On dit que A est ***trigonalisable*** *si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Proposition 14. *Caractérisation des matrices trigonalisables.*
La matrice $A \in \mathscr{M}_n\,(\mathbf{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, χ_A est scindé sur $\mathbf{K}$.

Démonstration. Admis.

$\square$

Corollaire 6. *Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.*
Toute matrice de $\mathscr{M}_n\,(\mathbf{C})$ est trigonalisable.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème de Gauss-d'Alembert qui assure que le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{C}$ et utiliser la proposition 14.

$\square$

Exemple 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A\,(\lambda) = \lambda^2$, donc A est trigonalisable.

Comme $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim\,(E_0(A)) = 1$, on en déduit que A n'est pas diagonalisable.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$ On en déduit que A est trigonalisable.
On a

$$E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_3(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Comme $\dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_3(A)) = 2 \neq 3$, donc A n'est pas diagonalisable. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 14. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, donc A est trigonalisable. On a

$$E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

On a $(A - \mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \\ -8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ de sorte que $\operatorname{Ker}\left((A - \mathrm{I}_3)^2\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Application aux suites récurrentes linéaires

Dans cette partie, on s'intéresse aux suites qui vérifient une relation de récurrence du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Ainsi, si l'on se donne $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$E_{a,b} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}.$$

Les suites qui vérifient une telle relation de récurrence s'appelle une **suite récurrente linéaire d'ordre 2**.

Proposition 15. *Structure de $E_{a,b}$.*
$E_{a,b}$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Il suffit de prouver que $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Déjà, $E_{a,b}$ n'est pas vide car il contient la suite nulle. Soit $(u, v) \in E_{a,b}^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} (u + \lambda v)_{n+2} &= u_{n+2} + \lambda v_{n+2} && \text{par définition de l'addition et la multiplication par un scalaire pour les suites} \\ &= (au_{n+1} + bu_n) + \lambda(av_{n+1} + bv_n) && \text{car } u, v \in E_{a,b} \\ &= a(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + b(u_n + \lambda v_n) \\ &= a(u + \lambda v)_{n+1} + b(u + \lambda v)_n. \end{aligned}$$

$E_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire.

□

On se donne $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de $E_{a,b}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Il est alors facile de remarquer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$. Une récurrence immédiate donne ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = A^n X_0. \tag{3}$$

Pour obtenir une expression de X_n (et donc de u_n), il suffit d'avoir une expression de A^n. On remarque que

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -b\lambda & -a \end{vmatrix} = \lambda^2 - a\lambda - b.$$

Ceci nous amène à poser la définition suivante.

Définition 13. *Équation caractéristique.*
*L'équation $\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \iff \lambda^2 = a\lambda + b$ s'appelle l'**équation caractéristique** associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*

La réduction de A dépend du discriminant de l'équation caractéristique. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 16. *Réduction de la matrice A.*
On distingue trois cas suivant le signe du discriminant du trinôme $\lambda^2 - a\lambda - b$.
On pose $\Delta = a^2 + 4b$.

(i) *Si $\Delta > 0$, en notant λ_1 et λ_2 les deux racines réelles du trinôme $\lambda^2 - a\lambda - b$, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.*

(ii) *Si $\Delta = 0$, en notant λ_0 l'unique racine du trinôme $\lambda^2 - a\lambda - b$, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbf{R}^\star$.*

(iii) *Si $\Delta < 0$, en notant $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ ($\theta \in \mathbf{R}$ et $r > 0$) les deux racines complexes conjuguées de $\lambda^2 - a\lambda - b$, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = PRP^{-1}$ où $R = r\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.*

Démonstration. On traite séparemment les trois points.

(i) Si $\Delta > 0$, $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ a deux valeurs propres. D'après le corollaire 3, A est diagonalisable. Par la définition 10, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(ii) Si $\Delta = 0$, il est clair que le polynôme caractéristique de A est scindé. La proposition 14 assure que A est trigonalisable. Comme A a une unique valeur propre λ_0, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbf{R}$.
Il reste à justifier que a est non nul. Si $a = 0$, alors $T = \lambda_0 \mathrm{I}_2$, puis $A = \lambda_0 \mathrm{I}_2$, ce qui est exclu car $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.

(iii) Comme $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$, on en déduit que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Il existe $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C})$ non nul tel que $AX = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}X$. Comme $A \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, on a $\overline{AX} = \overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}X}$, soit $A\overline{X} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\overline{X}$. Ainsi $\overline{X}$ est un vecteur propre pour $r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. On pose

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(X + \overline{X}\right) = \mathrm{Re}(X) \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X - \overline{X}\right) = \mathrm{Im}(X). \tag{4}$$

En particulier, $X_1, X_2 \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. On remarque que l'on a alors

$$X = X_1 + \mathrm{i}X_2 \quad \text{et} \quad \overline{X} = X_1 - \mathrm{i}X_2.$$

On a :

$$\begin{aligned}
AX_1 &= \frac{1}{2}\left(AX + A\overline{X}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(re^{i\theta}X + re^{-i\theta}\overline{X}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)(X_1 + iX_2) + r\left(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right)(X_1 - iX_2)\right) \\
&= r\cos(\theta)\,X_1 - r\sin(\theta)\,X_2.
\end{aligned}$$

Un même calcul montre que $AX_2 = r\sin(\theta)\,X_1 + r\cos(\theta)\,X_2$.
Montrons que (X_1, X_2) est une famille libre de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\alpha X_1 + \beta X_2 = 0.$$

En utilisant (4), on a

$$(\alpha - i\beta)\,X + (\alpha - i\beta)\,\overline{X} = 0.$$

$\left(X, \overline{X}\right)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc d'après la remarque 5 de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C})$, donc $\alpha - i\beta = 0$. Comme α et β sont réels, on a $\alpha = \beta = 0$.
La famille (X_1, X_2) est une famille libre de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. Comme elle contient deux éléments, c'est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
En notant P la matrice $P = (X_1 X_2)$ (inversible car la famille (X_1, X_2) est libre), on a $A = PRP^{-1}$ où $R = r\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

□

On peut (enfin !) énoncer la proposition qui permet de donner une expression explicite pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Proposition 17. *Expression pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E_{a,b}$. On rappelle que l'équation caractéristique associée est $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ et soit $\Delta = a^2 + 4b$ son discriminant. Comme dans la proposition 16, on distingue trois cas :

(i) *Si $\Delta > 0$, en notant λ_1 et λ_2 les deux solutions réelles de l'équation caractéristique, il existe deux réels A et B tels que*
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n.$$

(ii) *Si $\Delta = 0$, en notant l'unique solution réelle de l'équation caractéristique, il existe deux réels A et B tels que*
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = (A + Bn)\,\lambda_0^n.$$

(iii) *Si $\Delta < 0$, en notant $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ ($r > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$) les deux solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique, il existe deux réels A et B tels que*
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = r^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right).$$

Démonstration. On traite séparemment les trois cas.

(i) D'après la ligne (3), on a
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$
Or, d'après la proposition 16, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$. Une récurrence immédiate donne alors : pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$A^n = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$
On pose $Y_n = P^{-1}X_n$ de sorte que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad Y_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}Y_0.$$

Si l'on pose $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a $Y_n = \begin{pmatrix} a\lambda_1^n \\ b\lambda_2^n \end{pmatrix}$. En posant $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on en déduit que

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\lambda_1^n \\ b\lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha\lambda_1^n + b\beta\lambda_2^n \\ a\gamma\lambda_1^n + b\delta\lambda_2^n \end{pmatrix},$$

en particulier

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = a\alpha\lambda_1^n + b\beta\lambda_2^n.$$

(ii) D'après la ligne (3), on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

Or, d'après la proposition 16, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $a \in \mathbf{R}^\star$. On pose $B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

Pour calculer B^n, on utilise la formule du binôme de Newton. On écrit $A = \lambda_0 \mathrm{I}_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est facile de remarquer que pour tout $n \geq 2$, $N^n = 0$. Comme les matrices $\lambda_0 \mathrm{I}_2$ et N commutent, on a

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad B^n &= (\lambda_0 \mathrm{I}_2 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (\lambda_0 \mathrm{I}_2)^{n-k} \\ &= \lambda_0^n \mathrm{I}_2 + n\lambda_0^{n-1} N \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad A^n = P\left(\lambda_0^n \mathrm{I}_2 + n\lambda_0^{n-1} N\right) P^{-1}.$$

On pose $Y_n = P^{-1} X_n$ de sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad Y_n = \left(\lambda_0^n \mathrm{I}_2 + n\lambda_0^{n-1} N\right) Y_0.$$

Si l'on pose $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} a\lambda_0^n + bn\lambda_0^{n-1} \\ b\lambda_0^n \end{pmatrix}$. En posant $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\lambda_0^n + bn\lambda_0^{n-1} \\ b\lambda_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a\alpha + b\beta)\,\lambda_0^n + b\alpha n\lambda_0^{n-1} \\ (a\gamma + b\delta)\,\lambda_0^n + b\gamma n\lambda_0^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, on a $\lambda_0 \neq 0$, ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \left(a\alpha + b\beta + \frac{b\alpha}{\lambda_0} n\right) \lambda_0^n.$$

(iii) D'après la ligne (3), on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

Or, d'après la proposition 16, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $A = PRP^{-1}$ où $R = r \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Une récurrence presque immédiate donne

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad R^n = r^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

On pose $Y_n = P^{-1} X_n$ de sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad Y_n = r^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} Y_0.$$

En posant $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad Y_n = r^n \begin{pmatrix} a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta) \\ -a\sin(n\theta) + b\cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

En posant $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a

$$X_n = PY_n = r^n \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta) \\ -a\sin(n\theta) + b\cos(n\theta) \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} (a\alpha + b\beta)\cos(n\theta) + (b\alpha - a\beta)\sin(n\theta) \\ (a\gamma + b\delta)\cos(n\theta) + (b\gamma - a\delta)\sin(n\theta) \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = r^n \left((a\alpha + b\beta)\cos(n\theta) + (b\alpha - a\beta)\sin(n\theta) \right).$$

□

Remarque 12. Dans les trois cas ($\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$), $E_{a,b}$ est un espace vectoriel de dimension 2, dont on peut donner une base des solutions à l'aide de la proposition 17. En reprenant les notations de la proposition 17, on a :

(i) lorsque $\Delta > 0$, la famille $\left((\lambda_1^n)_{n\in\mathbf{N}}, (\lambda_2^n)_{n\in\mathbf{N}} \right)$ est une base de $E_{a,b}$;

(ii) lorsque $\Delta = 0$, la famille $\left((\lambda_0^n)_{n\in\mathbf{N}}, (n\lambda_0^n)_{n\in\mathbf{N}} \right)$ est une base de $E_{a,b}$;

(iii) lorsque $\Delta < 0$, la famille $\left((r^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbf{N}}, (r^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbf{N}} \right)$ est une base de $E_{a,b}$.

Exemple 15. Donner les expressions explicites des suites suivantes.

(i) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 4$.

(iii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2}$.

Solution. 1. L'équation caractéristique est $\lambda^2 = 3\lambda - 2$. Ses racines sont 1 et 2, ainsi il existe $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = A \times 1^n + B \times 2^n.$$

Pour déterminer les valeurs de A et B, on utilise les conditions initiales. On a $u_0 = A + B = 1$ et $u_1 = A + 2B = 2$. On récupère facilement $A = 0$ et $B = 1$, d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 2^n.$$

2. L'équation caractéristique est $\lambda^2 = 6\lambda - 9$. L'unique solution est 3, ainsi il existe $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = (A + Bn) \times 3^n.$$

Or, $u_0 = A = 0$ et $u_1 = 3(A + B) = 4$, ce qui donne $A = 0$ et $B = \frac{4}{3}$, puis

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{4}{3}n3^n = 4n3^{n-1}.$$

3. L'équation caractéristique est $\lambda^2 = \sqrt{2}\lambda - 1$. Son discriminant vaut -2. Les racines sont donc $\frac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ et $\frac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$. Il existe $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 1^n \times \left(A\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right).$$

Or, $u_0 = A = 1$ et $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(A + B) = \sqrt{2}$, d'où $A = 1$ et $B = 1$. On a donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

5 Autres applications

5.1 Diagonaliser une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Pour déterminer si A est ou pas diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on pourra retenir le plan suivant.

1. On calcule le polynôme caractéristique χ_A.
   (a) Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbf{K}$, on ne peut pas diagonaliser A sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
   (b) Si χ_A est scindé, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A.
2. On détermine une base $\mathscr{B}_k$ pour chaque sous-espace propre $E_{\lambda_k}(A)$.
   (a) S'il existe une valeur propre, disons λ_i, pour laquelle $\dim(E_{\lambda_i}(A)) < m_{\lambda_i}(A)$, alors A n'est pas diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
   (b) Sinon, on peut conclure que A est diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et on peut passer à la diagonalisation de A.
3. Diagonaliser A signifie donner une matrice D et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On note $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p)$ qui est une base de $\mathbf{K}^n$. Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, par les formules de changement de base, on a $A = PDP^{-1}$ avec
$$P = \mathrm{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B}) \quad \text{et} \quad D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1}(A)}, \dots\dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_{\lambda_p}(A)}).$$

Exemple 16. On se propose d'étudier la diagonisabilité de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

On a $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$.

χ_A n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$, donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

Exemple 17. On reprend l'exemple précédent et on souhaite étudier la diagonisabilité de A sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. On a $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

On détermine maintenant une base de ces sous-espaces propres. On a
$$E_{\mathrm{i}}(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{i}I_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
et
$$E_{-\mathrm{i}}(A) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{i}I_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme $\dim(E_{\mathrm{i}}(A)) + \dim(E_{-\mathrm{i}}(A)) = 2 = \dim(\mathbf{C}^2)$, on en déduit que A est diagonalisable sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. On peut donc écrire
$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec } D = \mathrm{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i}) \text{ et } P = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 13. Comme $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, on remarque que si λ est valeur complexe, alors $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A. De plus, si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, $\overline{X}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$. En effet, il suffit de remarquer d'une part que
$$\overline{AX} = \overline{\lambda X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$$
et d'autre part que
$$\overline{AX} = \overline{A}\,\overline{X} = A\overline{X}$$
pour conclure que $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$.

Exemple 18. On se propose d'étudier la diagonisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$.

On a $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$ qui est scindé sur $\mathbf{K}$.

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. De plus,

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, $\dim(E_1(A)) = 1 < 2 = \dim(\mathbf{K}^2)$. A n'est pas diagonalisable sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$.

Exemple 19. On se propose d'étudier la diagonisabilité de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{M}_3(\mathbf{K})$.

On a $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$ qui est scindé sur $\mathbf{K}$.

On a

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

et

$$E_4(A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme $\dim(E_1(A)) + \dim(E_4(A)) = 3 = \dim(\mathbf{K}^3)$. A est donc diagonalisable dans $\mathbf{K}$ et on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \mathrm{diag}(1,1,4) \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 Calculer les puissances d'une matrice

Pour calculer les puissances d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on peut essayer de suivre le plan suivant.

1. On diagonalise (si c'est possible, évidemment !) la matrice A, i.e. on trouve que matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
2. On précise la matrice P^{-1}.
3. En utilisant le fait que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ et $A^k = PD^kP^{-1}$, on termine les calculs.

Remarque 14. Lorsque A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable, on peut encore écrire $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure, donc $A^k = PT^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Par contre, il n'y a pas de formule générale pour calculer T^k.

Exemple 20. On se propose de calculer A^k où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a établi ci-dessus que l'on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \mathrm{diag}(1,1,4) \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On montre que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^k+2 & 4^k-1 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k+2 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k-1 & 4^k+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent servir pour les concours.

6.1 Étude de la diagonisabilité des matrices ayant une unique valeur propre

On se propose d'établir la proposition suivante.

Proposition 18. *Diagonisabilité des matrices ayant une unique valeur propre.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ayant une unique valeur propre $\lambda \in \mathbf{K}$.
A est diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ si, et seulement si, $A = \lambda \mathrm{I}_n$.

Démonstration. On sépare la preuve en deux étapes.

$\boxed{\Longleftarrow}$ C'est clair car $\lambda \mathrm{I}_n$ est diagonale.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda) = \lambda \mathrm{I}_n$ telles que

$$A = PDP^{-1} = P\lambda \mathrm{I}_n P^{-1} = \lambda \mathrm{I}_n.$$

□

Exemple 21. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}_3[X])$ défini par

$$\forall P \in \mathbf{K}_3[X], \quad f(P) = P(X+1).$$

On se propose d'étudier la diagonisabilité de f.
On a

$$f(1), \ f(X) = X+1, \ f\left(X^2\right) = (X+1)^2 = X^2+2X+1 \text{ et } f\left(X^3\right) = (X+1)^3 = X^3+3X^2+3X+1.$$

Ainsi, en notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{K}_3[X]$, on a

$$A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3.$$

Ainsi, f (et A) a une unique valeur propre 1. Comme $A \neq \mathrm{I}_4$, d'après la proposition 18, on en déduit que A n'est pas diagonalisable sur $\mathscr{M}_4(\mathbf{K})$.
Ainsi, f n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{K}_3[X]$.

6.2 Réduction des matrices de rang 1

Dans cette sous-partie, on se propose de caractériser la diagonisabilité des matrices de rang 1 en fonction de la trace. Plus précisément, on va établir la proposition suivante.

Proposition 19. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang 1. Alors, A est diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ si, et seulement si,* $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Avant de prouver la proposition 19, nous allons montrer le résultat suivant.

Lemme 1. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de rang 1. Il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ telles que $A = CL$.*
De plus, on a $\mathrm{Tr}(A) = LC$.

Démonstration. Comme A est de rang 1, une de ses colonnes est non nulle, par exemple, la numéro i et toutes les autres lui sont proportionnelles. On peut donc écrire

$$A = (\lambda_1 C_i | \lambda_2 C_i | \cdots | C_i | \cdots | \lambda_n C_n) = C_i \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_{i-1} & 1 & \lambda_{i+1} & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En notant $C_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, d'après la ligne prédédente, on a (on pose $\lambda_i = 1$ par commodité)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_1 & \cdots & \lambda_n a_1 \\ \lambda_1 a_2 & \lambda_2 a_2 & \cdots & \lambda_n a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_n & \lambda_2 a_n & \cdots & \lambda_n a_n \end{pmatrix}$$

de sorte que $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i$. Un simple calcul donne $LC = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i$.

□

On peut maintenant prouver la proposition 19.

Démonstration. D'après le lemme 1, il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ telles que $A = CL$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est A. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On utilise le théorème de la base incomplète pour compléter cette famille libre en une base $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ de E.

Comme la trace de f est indépendante de la base choisie, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{Tr}(A) \end{pmatrix},$$

où les $\star$ désignent des coefficients de la matrice. Ainsi,

$$\chi_f(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - \mathrm{Tr}(A) \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda - \mathrm{Tr}(A)). \tag{5}$$

On peut maintenant prouver l'équivalence.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, $\mathrm{Tr}(A)$ est valeur propre de A, donc $\dim\left(E_{\mathrm{Tr}(A)}\right) \geq 1$. On conclut en écrivant

$$n \geq \dim(E_0(A)) + \dim\left(E_{\mathrm{Tr}(A)}(A)\right) \geq n - 1 + 1 \geq n.$$

Finalement, $\dim(E_0(A)) + \dim\left(E_{\mathrm{Tr}(A)}(A)\right) = n$, A est donc diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors d'après la ligne (5), on aurait $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$, donc 0 serait l'unique valeur propre de A.
D'après la proposition 18, on aurait $A = 0\mathrm{I}_n = 0$, ce qui et impossible car A est de rang 1, donc non nulle.
Ainsi, $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

□

6.3 Matrice compagnon

Proposition 20. *Soit* $(c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$. *On note* $C(a_0, \ldots, a_n)$ *la matrice*

$$C(a_0, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\chi_{C(a_0,\ldots,a_n)}(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

Démonstration. On a

$$\chi_{C(a_0,\ldots,a_n)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + c_{n-1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient le résultat souhaité.

□

6.4 Introduction à la théorie des polynômes annulateurs

Définition 14. *Polynôme annulateur d'un endomorphisme/d'une matrice.*

(i) *Soit E un espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie). Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. On fit que P est un* ***polynôme annulateur*** *de f si $P(f) = 0$.*

(ii) *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et soit $P \in \mathbf{K}[X]$. On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$.*

Remarque 15. (i) Le polynôme nul est toujours un polynôme annulateur.

(ii) Un endomorphisme n'a pas toujours de polynôme annulateur non nul.

(iii) Si P un polynôme annulateur d'un endomorphisme/d'une matrice, alors pour tout $Q \in \mathbf{K}[X]$, le polynôme PQ est encore annulateur.

Exemple 22. Un projecteur est caractérisé par la relation $p^2 = p$, soit $p^2 - p = 0$. Le polynôme $X^2 - X$ est donc annulateur.

Exemple 23. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il est facile de vérifier que $A^2 + A - 2\mathrm{I}_3 = 0$, ainsi $X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de A.

Proposition 21. *Existence d'un polynôme annulateur en dimension finie.*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$. Tout endomorphisme de E admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit la famille $\mathscr{F} = \left(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{n^2}\right)$.

Comme $\dim(\mathscr{L}(E)) = n^2$ et $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = n^2 + 1$, $\mathscr{F}$ est liée. Ainsi, il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}) \in \mathbf{K}^{n^2+1}$ **non nul** tel que

$$a_0\mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_{n^2}u^{n^2} = 0,$$

autrement dit, le polynôme $a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$ est annulateur de u et est non nul.

$\square$

La proposition suivante permet de caractériser les endomorphismes diagonalisables en donnant une condition portant sur les polynômes annulateurs.

Proposition 22. *Caractérisation des endomorphismes diagonalisables.*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
u est diagonalisable sur E si, et seulement si, u admet un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples.

Démonstration. On traite séparemment les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E de vecteurs propres de u.
Soit enfin le polynôme $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$. Il est clair que P est scindé à racines simples.
Montrons que $P(u) = 0$. Il suffit de montrer que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $P(u)(e_j) = 0$.
Soit $j \in [\![1, p]\!]$, il existe $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $u(e_j) = \lambda_k e_j$. On a donc

$$P(u)(e_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (u - \lambda_i \mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_k \mathrm{id}_E)(e_j) = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (u - \lambda_i \mathrm{id}_E) \right)(0) = 0. \tag{6}$$

Il s'ensuit que $P(u) = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ un polynôme annulateur scindé annulateur à racines simples annulant u. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $P_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} (X - \lambda_i)$. Montrons que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)$, cela montrera alors que u est diagonalisable.
On procède par analyse/synthèse.

$\boxed{\textit{Analyse.}}$ Soit $x \in E$. On suppose qu'il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \times \cdots \times \mathrm{Ker}(u - \lambda_p \mathrm{id}_E)$ tel que

$$x = x_1 + \cdots + x_p. \tag{7}$$

On remarque que

$$\forall (k, \ell) \in [\![1, p]\!]^2, \quad (k \neq \ell) \Longrightarrow (P_k(u)(x_\ell) = 0).$$

En effet, on a

$$P_k(u)(x_\ell) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k, \ell}}^{p} (u - \lambda_i \mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_\ell \mathrm{id}_E)(x_\ell) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k, \ell}}^{p} (u - \lambda_i \mathrm{id}_E)(0) = 0$$

car $u(x_\ell) = \lambda_\ell x_\ell$. De plus,

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad P_j(x_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} (\lambda_j - \lambda_i) x_j.$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. En composant (7) par $P_j(u)$, on a

$$P_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} (\lambda_j - \lambda_i) x_j.$$

Comme $\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{p} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, on récupère donc

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad x_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{p} (\lambda_j - \lambda_i)} P_j(u)(x).$$

$\boxed{\textit{Synthèse.}}$ Par définition, on a $x_1 + \cdots + x_p = x$.
De plus, si $j \in [\![1,p]\!]$, on a

$$(u - \lambda_j \mathrm{id}_E)(x_j) = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{p} (\lambda_j - \lambda_i)} (u - \lambda_j \mathrm{id}_E) \circ P_j(u)(x_j) = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{p} (\lambda_j - \lambda_i)} P(u)(x_j) = 0$$

en reprenant le calcul fait à la ligne (6).

□

Corollaire 7. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.*
Alors, $u_{|F}$ est diagonalisable.

Démonstration. Comme u est diagonalisable, d'après la proposition 22, u admet un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples P. En particulier,

$$\forall x \in F, \quad P(u)(x) = 0.$$

Ainsi, P est un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples pour $u_{|F}$, d'après la proposition 22, $u_{|F}$ est diagonalisable.

□

Théorème 1. *Théorème de réduction simultanée.*
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que $u \circ v = v \circ u$.
Alors, il existe une base de vecteurs propres pour u et v. Autrement dit, il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u et de v est diagonale.

Démonstration. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de v. Comme v est diagonalisable, on peut écrire $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(v - \lambda_i \mathrm{id}_E)$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$ et soit $x \in \mathrm{Ker}(v - \lambda_i \mathrm{id}_E)$. Comme u et v commutent, on peut écrire

$$v(u(x)) = u(v(x)) = u(\lambda_i x) = \lambda_i u(x).$$

Ainsi, $u(x) \in \mathrm{Ker}(v - \lambda_i \mathrm{id}_E)$, donc u laisse stable $\mathrm{Ker}(v - \lambda_i \mathrm{id}_E)$.

Comme u est diagonalisable sur E, d'après la proposition 7, $u_{|\mathrm{Ker}(v - \lambda_i \mathrm{id}_E)}$ est diagonalisable : soit $\mathscr{B}_i$ une base de vecteurs propres de $u_{|\mathrm{Ker}(v - \lambda_i \mathrm{id}_E)}$.

Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$. $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(v - \lambda_i \mathrm{id}_E)$, c'est donc une base de vecteurs propres de v. De plus, par construction, $\mathscr{B}$ est une famille de vecteurs propres de u.

□

Corollaire 8. *Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisables et qui commutent. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et deux matrices diagonales D et D' telles que*

$$A = PDP^{-1} \quad \textit{et} \quad B = PD'P^{-1}.$$

Démonstration. C'est la « version matricielle » du théorème 1.

□

Remarque 16. On peut montrer un résultat analogue pour deux endomorphismes de E trigonalisables et qui commutent.