Chapitre 8 : Séries entières

Table des matières

1 Convergence d'une série entière

1.1 Rayon de convergence

Définition 1. *Série entière*

On appelle ***série entière d'une variable complexe*** *toute série de la forme* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *où* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est une suite réelle ou complexe.*

Lemme 1. *Lemme d'Abel.*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite complexe et soit* $r > 0$ *tel que la suite* $(a_n r^n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est bornée. Alors la série* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *converge absolument pour tout complexe* z *tel que* $|z| < r$*.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < r$. Soit M un majorant de la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbf{N}}$. Ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n z^n| = |a_n r^n| \left|\frac{z}{r}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{r}\right|^n .$$

Comme $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} M \left|\frac{z}{r}\right|^n$ converge (série géométrique).

Par comparaison par inégalité des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument, donc converge.

□

Définition 2. *Rayon de convergence.*

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *une série entière. Soit*

$$\mathscr{A} = \left\{r \in \mathbf{R}_+,\ (a_n r^n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée}\right\}.$$

On appelle le ***rayon de convergence*** *de la série entière* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *la borne supérieure (dans* $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$*) de l'ensemble* $\mathscr{A}$*.*

La proposition suivante découle directement du lemme d'Abel.

Proposition 1. *Soit* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon* $R \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\} > 0$*. On a :*

(i) *Pour tout* $z \in \mathbf{C}$ *tel que* $|z| < R$*, la série* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *converge absolument.*

(ii) *Pour tout* $z \in \mathbf{C}$*,* $|z| > R$*, la suite* $(a_n z^n)_{n \in \mathbf{N}}$ *n'est pas bornée, en particulier, la série* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *diverge.*

(iii) *Si* $z \in \mathbf{C}$ *et* $|z| = R$*, on ne peut rien dire sur la nature de la série* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$*.*

Remarque 1. Il est facile de constater que les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \lambda a_n z^n$ ($\lambda \in \mathbf{C}^\star$) ont même rayon de convergence.

⚠On ne peut rien dire du comportement au bord, i.e. lorsque $|z| = R$ si R est fini. Il faut traiter au cas par cas.

Exemple 1. On se propose d'étudier le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} n z^n$.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{(n+1)\, z^{n+1}}{n z^n}\right| = |z| .$$

D'après le critère de d'Alembert pour les séries, la série $\sum_{n\geq 0} nz^n$ converge absolument si $|z| < 1$ et la série $\sum_{n\geq 0} n|z|^n$ diverge si $|z| > 1$. Le rayon de convergence vaut donc 1.

Exemple 2. On se propose d'étudier le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^{n+1}z^{n+1}}{2^n z^n}\right| = 2|z|.$$
D'après le critère de d'Alembert pour les séries, la série $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$ converge absolument si $|z| < \frac{1}{2}$ et la série $\sum_{n\geq 0} 2^n |z|^n$ diverge si $|z| > \frac{1}{2}$. Le rayon de convergence vaut donc $\frac{1}{2}$.

Exemple 3. On se propose d'étudier le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = 0.$$
D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbf{C}$. Le rayon de convergence vaut $+\infty$.

Exemple 4. On se propose d'étudier le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 0} n!z^n$.

On a $z \in \mathbf{C}^\star$. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{z^n n!}\right| = +\infty.$$
D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n\geq 0} n!z^n$ diverge pour $z \in \mathbf{C}^\star$. Le rayon de convergence vaut 0.

1.2 Disque et intervalle de convergence

Définition 3. *Intervalle ouvert de convergence, disque ouvert de convergence.*

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \geq 0$.

(i) *Le disque ouvert de centre 0 et de rayon R est appelé le **disque ouvert de convergence**.*

(ii) *L'intervalle $]-R, R[$ est appelé l'**intervalle ouvert de convergence**.*

Remarque 2. Lorsque $R = +\infty$, le disque ouvert de convergence est $\mathbf{C}$ et l'intervalle ouvert de convergence est $\mathbf{R}$.

Proposition 2. *Comparaison des rayons entre deux séries entières.*

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$. On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

On a alors $R_a \geq R_b$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| < R_b$. Par hypothèse, on a :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n z^n| \leq |b_n z^n|.$$

Comme la suite $(b_n z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'est aussi.

Par définition de R_a, on a $|z| < R_a$.

$\square$

Remarque 3. On adapte facilement la preuve de la proposition 2 lorsque l'inégalité $|a_n| \leq |b_n|$ est vraie seulement à partir d'un certain rang.

Proposition 3. *Comparaison des rayons entre deux séries entières, version équivalence.*

Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *deux séries entières. On suppose que* $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$. *On note* R_a *et* R_b *les rayons de convergence respectifs des séries entières* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

On a alors $R_a = R_b$.

Démonstration. Comme $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \frac{1}{2}|b_n| \leq |a_n| \leq \frac{3}{2}|b_n|.$$

La proposition 2 (plus exactement, la remarque 3) et la remarque 1 assurent alors que $R_a = R_b$.

$\square$

Proposition 4. *Rayon de la série entière « dérivée ».*

Les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

Démonstration. On note R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et R' celui de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$.

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $|a_n| \leq |n a_n|$, d'après la proposition 2, on a $R \geq R'$. Ainsi, il suffit de montrer que $R \leq R'$. Si $R = 0$, le résultat est clair, on suppose donc $R > 0$.

Soit $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| < R$. Soit aussi $w \in \mathbf{C}$ avec $|z| < |w| < R$. On a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad n a_n z^n = a_n w^n n \left(\frac{z}{w}\right)^n.$$

Comme $|w| < R$, la suite $(a_n w^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. De même, la suite $\left(n\left(\frac{z}{w}\right)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée car converge vers 0 (c'est une croissance comparée car $|w| > |z|$). On en déduit donc que la suite $(n a_n z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc $|z| < R'$.

$\square$

2 Propriétés de la somme

Définition 4. *Fonction somme.*

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *D'après la proposition 1, la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge pour tout* $x \in \left]-R, R\right[$.

On définit la fonction somme $S : \begin{cases} \left]-R,R\right[& \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$.

Proposition 5. *Continuité de la fonction somme.*

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *La fonction somme est alors continue sur l'intervalle* $\left]-R, R\right[$.

Démonstration. Admis.

$\square$

Proposition 6. *Régularité de la fonction somme.*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*. La fonction somme* S *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur l'intervalle* $]-R, R[$ *et*

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \forall x \in \left]-R, R\right[, \quad S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n}.$$

Démonstration. Admis. □

Proposition 7. *Intégration terme à terme.*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon* $R > 0$*. Pour tout segment* $[a, b] \subset \left]-R, R\right[$*, on a*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 5. On définit, si cela est possible $\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Il est facile de voir que $\mathscr{D}_{\mathrm{Li}_2} = [-1, 1]$.

Soit $x \in \left]-1, 1\right[$. On verra que $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$. On remarque que le rayon de la série entière vaut 1. Ainsi

$$\forall t \in \left]-1, 1\right[, \quad \frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n},$$

où, par abus, on note encore $t \longmapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ la fonction prolongée en 0.

D'après la proposition 7, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} \mathrm{d}t &= -\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} \right) \mathrm{d}t \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^x t^{n-1} \mathrm{d}t \right) \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \\
&= -\mathrm{Li}_2(x).
\end{aligned}$$

3 Fonctions développables en série entière

3.1 Généralités

Définition 5. *Fonction développable en série entière.*
Soit f *une fonction définie sur un intervalle ouvert* I *contenant* 0*. On dit que* f *est* ***développable en série entière*** *s'il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *telle que pour tout* $x \in I$*, la série* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge et*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Proposition 8. *Unicité du développement en série entière.*

Soit I un intervalle ouvert non vide contenant 0 et soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction développable en série entière. Alors, en utilisant les notations de la définition 5, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

En particulier, si une fonction est développable en série entière, son développement est unique.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme I est ouvert et non vide, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, noté R, est strictement positif.

D'après la proposition 6, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

□

Remarque 4. La proposition 8 se reformule en : si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ sont deux séries entières de rayon $R > 0$. Alors,

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = b_n.$$

3.2 Développement en série entière des fonctions usuelles

On rappelle le résultat suivant vu en TSI 1.

Proposition 9. *Formule de Taylor avec reste intégral.*

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors

$$\forall (a, x) \in I^2, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-a)^n \,\mathrm{d}t.$$

Proposition 10. *On retiendra le tableau suivant :*

Développement en série entière	***Rayon de convergence***	***Intervalle ouvert de convergence***
$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$]-1,1[$
$\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$	1	$]-1,1[$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$	1	$]-1,1[$
$\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbf{R}$
$\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbf{R}$
$\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbf{R}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)\right) \dfrac{x^n}{n!}$, $\alpha \in \mathbf{R}$	1	$]-1,1[$

Démonstration. Nous ne faisons pas toutes les preuves. Le lecteur intéressé adaptera la preuve faite pour la fonction exp.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction exp qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre 0 et x. On a :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{\exp^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{n!} (x-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \right| = \left| \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{n!} (x-t)^n \,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{n!} |x|^{n+1} \mathrm{e}^{\max\{0,|x|\}}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} |x|^{n+1} \mathrm{e}^{\max\{0,|x|\}} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = \mathrm{e}^x.$$

□

Exemple 6. On se propose de montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

On sait que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière en 0, de rayon de convergence égal à 1 et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

D'après la proposition 6, on peut dériver terme à terme sur $]-1,1[$ et

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

3.3 Exponentielle complexe

On rappelle la définition de l'exponentielle complexe donnée en TSI 1.

Définition 6. *Exponentielle complexe.*
Pour tout réel x et y, on ***pose*** *:*

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \left(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\right).$$

La proposition suivante fait le lien avec les séries entières.

Proposition 11. *Pour tout complexe z, on a*

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Démonstration. Admis. □

4 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent servir pour les concours.

4.1 Règle de d'Alembert

Proposition 12. *Critère de d'Alembert.*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Alors, le rayon de convergence de la série entière est $R = \frac{1}{\ell}$ avec pour convention que $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \ell\,|z|.$$

(i) Si $\ell \in \mathbf{R}_+^\star$. D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument si $|z| < \frac{1}{\ell}$ et diverge si $|z| > \frac{1}{\ell}$. Ainsi, le rayon de convergence vaut $R = \frac{1}{\ell}$.

(ii) Si $\ell = 0$. D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}^\star$. La rayon de convergence vaut donc $+\infty$.

(iii) Si $\ell = +\infty$.D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge. Le rayon de convergence vaut 0.

D'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument si $|z| < \frac{1}{\ell}$ et diverge si $|z| > \frac{1}{\ell}$. Ainsi, le rayon de convergence vaut $R = \frac{1}{\ell}$. □

Remarque 5. La réciproque de ce résultat est fausse.

⚠On le répète, ce résultat **n'est pas** au programme. Il faut savoir refaire la preuve.

4.2 Une preuve économique du théorème de Gauss-d'Alembert

Définition 7. *Fonction entière.*

On appelle ***fonction entière*** *toute fonction définie sur* $\mathbf{C}$*, développable en série entière en* 0 *et de rayon de convergence égal à* $+\infty$.

Théorème 1. *Théorème de Liouville.*

Toute fonction entière $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ *bornée est constante.*

Démonstration. On écrit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Soient $r > 0$ et $m \in \mathbf{N}^\star$. Comme $[-r, r]$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $\mathbf{R}$, d'après la proposition 7, on a

$$\int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t}\mathrm{d}t = 2\pi a_m r^m.$$

Soit $M \geq 0$ un majorant de f, on a

$$\forall m \in \mathbf{N}^\star, \quad \left|\int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right| \mathrm{d}t \leq 2M\pi.$$

On en déduit donc que

$$\forall m \in \mathbf{N}^\star, \quad |a_m| \leq \frac{M}{r^m} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $f(z) = a_0$, ainsi f est constante.

□

On en déduit une preuve du théorème de Gauss-d'Alembert.

Théorème 2. *Théorème de Gauss-d'Alembert.*

Toute fonction polynomiale non constante définie sur $\mathbf{C}$ *admet au moins une racine complexe.*

Démonstration. Soit P une fonction polynomiale non constante. On suppose que P ne s'annule pas.

On écrit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$. Comme $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} |a_n z^n| \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{1}{P(z)} = 0$.

Comme P ne s'annule pas (hypothèse), $\dfrac{1}{P}$ est continue sur $\mathbf{C}$ et comme $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{1}{P(z)} = 0$, elle est bornée.

En **admettant** que $\dfrac{1}{P}$ est une fonction entière, d'après le théorème 1, on en déduit qu'elle est constante, soit P est constante, ce qui est exclu.

Ainsi, l'hypothèse faite est impossible : on en déduit que P s'annule sur $\mathbf{C}$.

□