Inégalité de Sobolev logarithmique sur le cercle discret

Erik Thomas *

Résumé

Le but de cet article est d'établir une inégalité de Sobolev logarithmique pour la mesure $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_k$ sur le cercle discret $[\![0, n-1]\!]$. Cette inégalité permet de retrouver, à une constante près, une inégalité de type Poincaré déjà mentionnée dans [4].

1 Introduction

1.1 Introduction au problème discret

Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 3. On définit $\mathscr{F}_n$ l'ensemble des applications n-périodiques de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{R}$. $\mathscr{F}_n$ muni des lois usuelles est un espace vectoriel de dimension n.

On pose $I_n := [\![0, n-1]\!]$ le cercle discret. L'addition est donc celle de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ [1]. Ainsi, pour définir un élément $f \in \mathscr{F}_n$, il suffit de définir f sur I_n.

On définit sur I_n une probabilité μ par $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_k$ où δ_k est la mesure de Dirac en k. Autrement dit,

$$\forall A \subset I_n, \quad \mu(A) = \sum_{k\in A}\frac{1}{n} = \frac{\mathrm{card}(A)}{n}.$$

I_n muni de la tribu $\mathscr{P}(I_n)$ et de cette mesure est donc un espace probabilisé. Ainsi, si $f \in \mathscr{F}_n$, on a :

$$\int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Définition 1.1. *Gradient discret.*
Si $f \in \mathscr{F}_n$, on définit ∇f par

$$\forall x \in I_n, \quad \nabla f(x) := f(x+1) - f(x).$$

On note que $\nabla f \in \mathscr{F}_n$.

Remarque 1. Il est clair que $\nabla : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n$ est linéaire. De plus, si on note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 de $\mathscr{F}_n$, on a $\nabla(\mathbf{1}) = 0$.

1.2 Entropie et inégalité de Sobolev logarithmique

La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est systématiquement prolongée par continuité en 0.

Définition 1.2. *Entropie.*
Si $f : I_n \to \mathbf{R}_+$ est à valeurs positives, on définit l'entropie de f pour la mesure μ_n, notée $\mathrm{Ent}(f)$, *par :*

$$\mathrm{Ent}(f) := \int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\left(\int_{I_n} f(x)\ln(f(x))\,\mathrm{d}\mu_n(x) - \left(\int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)\ln\left(\int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)\right).$$

* erik.thomas@ens-rennes.fr

1. En particulier, l'addition sur les indices est modulo n

Remarque 2. Le terme $\int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)$ peut paraître surprenant : il est uniquement présent pour que l'entropie soit homogène en λ^2. La proposition suivante précise cela.

Proposition 1.1. *Soit $f \in \mathscr{F}_n$ à valeurs positives. Alors :*

(i) $\mathrm{Ent}(f) \geq 0$ *;*

(ii) $\mathrm{Ent}(f) = 0$ *si, et seulement si, f est constante ;*

(iii) *si $\lambda \geq 0$, alors* $\mathrm{Ent}(\lambda f) = \lambda^2 \,\mathrm{Ent}(f)$.

Démonstration. (i) La fonction $\varphi : x \mapsto x\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+$. L'inégalité de Jensen donne l'inégalité souhaitée.

(ii) Si f est constante, il est clair que $\mathrm{Ent}(f) = 0$. Réciproquement, si f n'est pas constante (en particulier, f n'est pas nulle), l'inégalité de Jensen est stricte, donc $\mathrm{Ent}(f) > 0$.

(iii) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}(\lambda f) &= \int_{I_n} (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \left(\int_{I_n} (\lambda f)(x) \ln((\lambda f)(x))\,\mathrm{d}\mu_n(x) - \left(\int_{I_n} (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \ln \left(\int_{I_n} (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \right) \\
&= \lambda \int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \left(\lambda \int_{I_n} f(x) \ln(f(x))\,\mathrm{d}\mu_n(x) + \lambda \ln(\lambda) \int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \right. \\
&\quad \left. - \lambda \left(\int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \right) \ln \left(\int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \right) - \lambda \ln(\lambda) \int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \right) \\
&= \lambda^2 \,\mathrm{Ent}(f).
\end{aligned}$$

□

Le but de cet article est de prouver la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Inégalité de Sobolev logarithmique pour μ_n.*

Soit α un réel tel que $-1 < \alpha < 0$. On rappelle que $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 de $\mathscr{F}_n$. Soit $h \in \mathscr{F}_n$ vérifiant pour tout $x \in I_n$, $h(x) \geq \alpha$ et $\int_{I_n} h(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) = 0$, on a :

$$\mathrm{Ent}(\mathbf{1} + h) \leq \frac{1}{4\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \times \left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{1+\alpha} \right) \int_{I_n} \nabla(h)(x)^2 \,\mathrm{d}\mu_n(x).$$

Cette inégalité nous permettra d'établir la proposition suivante.

Proposition 1.3. *Inégalité de Poincaré pour la mesure μ_n.*

La mesure μ_n satisfait une inégalité de Poincaré, i.e. pour tout $f \in \mathscr{F}_n$, on a :

$$\int_{I_n} \left(f(x) - \int_{I_n} f(t) \mathrm{d}\mu_n(t) \right)^2 \mathrm{d}\mu_n(x) \leq \frac{n-1}{n\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \int_{I_n} \nabla(f)(x)^2 \mathrm{d}\mu_n(x).$$

Dans [4], il est obtenu une inégalité un peu meilleure

$$\forall f \in \mathscr{F}_n, \quad \int_{I_n} \left(f(x) - \int_{I_n} f(t)\,\mathrm{d}\mu_n(t) \right)^2 \mathrm{d}\mu_n(x) \leq \frac{1}{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \int_{I_n} \nabla f(x)^2 \,\mathrm{d}\mu_n(x).$$

On remarque néanmoins que l'ordre de grandeur de la constante, lorsque en $n \to +\infty$, est en n^2.

1.3 Considérations historiques

C'est en 1975 que Gross, dans son article [2], fait le lien entre les inégalités de Sobolev et l'hypercontractivité, phénomène qui assure que certains opérateurs (par exemple le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck) définis sur $\mathrm{L}^p(\mu)$ (μ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$) sont en fait des opérateurs de $\mathrm{L}^p(\mu)$ vers $\mathrm{L}^q(\mu)$ avec $q > p$. Nous renvoyons à [1] pour une introduction à l'hypercontractivité.

Les inégalités de Sobolev logarithmiques ont d'abord été établies dans le cas de la mesure gaussienne, ainsi pour toute fonction f positive assez régulière telle que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x) = 1$,

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\ln(f(x))\,\mathrm{d}\gamma_1(x) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \frac{f'(x)^2}{f(x)}\,\mathrm{d}\gamma_1(x), \tag{1}$$

où γ_1 est la mesure gausienne sur $\mathbf{R}$ de densité $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. Cette inégalité se généralise à $\mathbf{R}^n$ sans difficulté par un argument de tensorisation.

Un autre exemple classique d'inégalité de Sobolev logarithmique est le cube discret $\Omega_n := \{-1,1\}^n$ muni de la mesure uniforme σ_n. On peut alors montrer que pour toute fonction $g : \Omega_n \to \mathbf{R}$

$$\int_{\Omega_n} g^2(x)\ln(g^2(x))\,\mathrm{d}\sigma_n(x) - \Big(\int_{\Omega_n} g^2(x)\,\mathrm{d}\sigma_n(x)\Big)\ln\Big(\int_{\Omega_n} g^2(x)\,\mathrm{d}\sigma_n(x)\Big) \leq \int_{\Omega_n} \nabla(g)(x)^2\,\mathrm{d}\sigma_n(x), \tag{2}$$

où ∇ est un gradient discret (pas le même que celui défini à la définition 1.1). Comme pour le cas de la mesure gaussienne, le résultat se tensorise et il suffit de prouver le résultat pour $n = 1$.

L'inégalité (2), utilisée avec le théorème central limite, permet de retrouver l'inégalité (1).

2 Résultats intermédiaires et preuve de la proposition 1.2

Avant de prouver la proposition 1.2, nous utiliserons les lemmes suivants.

Lemme 2.1. *Soient $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des réels strictement positifs. Soit $H(x_0, \ldots, x_{n-1})$ la matrice définie par :*

$$H(x_0,\ldots,x_{n-1}) := \begin{pmatrix} 1/x_1 - 1/S & -1/S & \cdots & -1/S \\ -1/S & 1/x_2 - 1/S & \cdots & -1/S \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1/S & -1/S & \cdots & 1/x_{n-1} - 1/S \end{pmatrix}.$$

où $S := \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} x_j$. $H(x_0,\ldots,x_{n-1})$ est symétrique et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(H(x_0,\ldots,x_{n-1}))$, alors $|\lambda| \leq \dfrac{n-2}{S} + \dfrac{1}{m}$ avec $m := \min\{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$.

Démonstration. La symétrie de $H(x_0,\ldots,x_{n-1})$ est claire. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(H(x_0,\ldots,x_{n-1}))$. Le théorème de Gerschgorin (voir par exemple [3] pour une preuve) assure que

$$\exists i \in [\![0, n-1]\!], \quad \left|\lambda - \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{S}\right)\right| \leq \frac{n-1}{S}.$$

Il s'ensuit que

$$|\lambda| \leq \left|\lambda - \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{S}\right)\right| + \left|\frac{1}{x_i} - \frac{1}{S}\right| \leq \frac{n-2}{S} + \frac{1}{m}.$$

$\square$

Lemme 2.2. *La matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique positive non inversible.* 0 *est valeur* *propre simple et* $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$. *De plus, la plus petite valeur propre non nulle de* A *est minorée par* $2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$.

Démonstration. On remarque que A est la matrice de l'endomorphisme symétrique $-\Delta$ défini sur $\mathscr{F}_n$ par :

$$\forall f \in \mathscr{F}_n, \quad \Delta(f)(x) := f(x+1) + f(x-1) - 2f(x).$$

Dans [4], il est montré que $\mathrm{Sp}\,(-\Delta) \subset \mathbf{R}_+$, que 0 est valeur propre simple et que la plus petite valeur propre non nulle est minorée par $2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$.

□

Nous prouvons la proposition 1.2.

Démonstration. On reprend les notations de la proposition 1.2.

Soit $(h_0, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$ tel que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $h_i \geq \alpha$ et $\sum_{i=0}^{n-1} h_i = 0$. L'inégalité à prouver se réécrit en :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+h_i)\ln(1+h_i) \leq c_{\alpha,n}\sum_{i=0}^{n-1}(h_{i+1}-h_i)^2,$$

où l'on a posé $c_{\alpha,n} := \dfrac{1}{4\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \times \left(\dfrac{n-2}{n} + \dfrac{1}{1+\alpha}\right)$. Soit f définie sur $(\mathbf{R}_+^\star)^n$ par

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) := \sum_{k=0}^{n-1} x_k \ln(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j\right).$$

Notons que

$$f(1+h_0, \ldots, 1+h_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1}(1+h_i)\ln(1+h_i).$$

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \ln(x_k) - \ln\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} x_j\right)$. On remarque que $f(1, \ldots, 1) = 0$ et $\nabla f(1, \ldots, 1) = 0$. On a aussi, pour tous $i, j \in [\![0, n-1]\!]$ avec $i \neq j$:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{x_i} - \frac{1}{S} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{S},$$

où l'on a posé $S := \sum_{j=0}^{n-1} x_j$. La matrice hessienne de f en $(x_0, \ldots, x_{n-1})$, notée $H(x_0, \ldots, x_{n-1})$ est donnée par :

$$H(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1/x_0 - 1/S & -1/S & \cdots & -1/S \\ -1/S & 1/x_1 - 1/S & \cdots & -1/S \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1/S & -1/S & \cdots & 1/x_{n-1} - 1/S \end{pmatrix}.$$

Si $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in (\mathbf{R}_+)^n$, on note $q_{(y_0, \ldots, y_{n-1})}$ la forme quadratique associée à la matrice $H(y_0, \ldots, y_{n-1})$. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\begin{aligned} f(1+h_0, \ldots, 1+h_{n-1}) &= f(1, \ldots, 1) + \langle \nabla f(1, \ldots, 1), (h_0, \ldots, h_{n-1})\rangle + \int_0^1 (1-t) q_{(1+th_0, \ldots, 1+th_{n-1})}(h_0, \ldots, h_{n-1})\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-t) q_{(1+th_0, \ldots, 1+th_{n-1})}(h_0, \ldots, h_{n-1})\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $h_i \geq \alpha$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, le lemme 2.1 assure que le spectre de la matrice $H(1+tx_0, \ldots, 1+tx_{n-1})$ (avec $t \in [0,1]$) est majoré (en valeur absolue) par $\dfrac{n-2}{n} + \dfrac{1}{1+\alpha}$. En particulier,

$$\forall t \in [0,1],\ \forall (y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}^n, \quad q_{(1+th_0, \ldots, 1+th_{n-1})}(y_0, \ldots, y_{n-1}) \leq \left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{1+\alpha}\right) \|(y_0, \ldots, y_{n-1})\|^2 .$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$. Il s'ensuit que

$$f(1+h_0, \ldots, 1+h_{n-1}) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{1+\alpha}\right) \|(h_0, \ldots, h_{n-1})\|^2 . \tag{3}$$

On introduit la forme quadratique q définie sur $\mathbf{R}^n$ par :

$$\forall (y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}^n, \quad q(y_0, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)^2 .$$

On remarque que la matrice de la forme quadratique q est la matrice A donnée par lemme 2.2. Comme le noyau de A est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que si $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \{(1, \ldots, 1)\}^{\perp}$ (ce qui revient à dire que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i = 0$), alors

$$\|(y_0, \ldots, y_{n-1})\|^2 \leq \frac{1}{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} q(y_0, \ldots, y_{n-1}).$$

Cette inégalité, utilisée avec l'inégalité (3), donne

$$\begin{aligned} f(1+h_0, \ldots, 1+h_{n-1}) &\leq \frac{1}{4\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \times \left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{1+\alpha}\right) q(h_0, \ldots, h_{n-1}) \\ &\leq \frac{1}{4\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \times \left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{1+\alpha}\right) \sum_{k=0}^{n-1} (h_{k+1} - h_k)^2 . \end{aligned}$$

□

Remarque 3. Un argument abstrait de compacité utilisé avec le théorème des bornes atteintes de Weierstrass permet de prouver économiquement la proposition 1.2. Par contre, la constante de l'inégalité n'est pas connue.

On en déduit le corollaire suivant, dont la formulation est plus conventionnelle pour les inégalités de Sobolev logarithmiques.

Corollaire 2.1. *Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour tout $f \in \mathscr{F}_n$ telle que $f(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in I_n$, alors :*

$$\int_{I_n} f(x) \ln(f(x)) \,\mathrm{d}\mu_n(x) - \int_{I_n} f(x) \,\mathrm{d}\mu_n(x) \ln\left(\int_{I_n} f(x) \,\mathrm{d}\mu_n(x)\right) \leq c_{\alpha,n} \int_{I_n} \frac{\nabla(f)(x)^2}{f(x)} \,\mathrm{d}\mu_n(x), \tag{4}$$

où l'on a posé $c_{\alpha,n} := \dfrac{1}{4\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \times \left(\dfrac{n-2}{n} + \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{F}_n$ telle que $f(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in I_n$. Notons que l'inégalité (4) est homogène en λ (il suffit d'adapter la preuve de la proposition 1.1), on peut donc supposer que $\displaystyle\int_{I_n} f(x) \,\mathrm{d}\mu_n(x) = 1$.

On pose $h := f - \mathbf{1}$, de sorte que $f = \mathbf{1} + h$. On note que $h(x) \geq \alpha - 1 \in]-1, 0[$ et $\displaystyle\int_{I_n} h(x) \,\mathrm{d}\mu_n(x) = 0$.

La proposition 1.2 assure donc que

$$\operatorname{Ent}(f)=\operatorname{Ent}(\mathbf{1}+h)\leq c_{\alpha,n}\int_{I_n}\nabla(h)(x)^2\,\mathrm{d}\mu_n(x)=c_{\alpha,n}\int_{I_n}\nabla(f)(x)^2\,\mathrm{d}\mu_n(x),$$

où $c_{\alpha,n}:=\dfrac{1}{4\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}\times\left(\dfrac{n-2}{n}+\dfrac{1}{\alpha}\right)$. Il s'ensuit que

$$\int_{I_n}f(x)\ln(f(x))\,\mathrm{d}\mu_n(x)-\int_{I_n}f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\ln\left(\int_{I_n}f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)\leq c_{\alpha,n}\frac{\displaystyle\int_{I_n}\nabla(f)(x)^2\,\mathrm{d}\mu_n(x)}{\displaystyle\int_{I_n}f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)}.\tag{5}$$

Mais, en utilisant l'équivalence des normes 1 et 2 dans $\mathbf{R}^n$, on a :

$$\int_{I_n}\nabla(f)(x)^2\,\mathrm{d}\mu_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(f(k+1)-f(k))^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|f(k+1)-f(k)|\right)^2=\left(\int_{I_n}|\nabla(f)(x)|\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)^2.$$

Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_{I_n}|\nabla(f)(x)|\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)^2=\left(\int_{I_n}\frac{|\nabla(f)(x)|}{\sqrt{f(x)}}\times\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)^2\leq\int_{I_n}\frac{\nabla(f)(x)^2}{f(x)}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\times\int_{I_n}f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x).$$

Cette inégalité utilisée avec l'inégalité (5) donne

$$\int_{I_n}f(x)\ln(f(x))\,\mathrm{d}\mu_n(x)-\int_{I_n}f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\ln\left(\int_{I_n}f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)\leq c_{\alpha,n}\int_{I_n}\frac{\nabla(f)(x)^2}{f(x)}\,\mathrm{d}\mu_n(x),$$

qui est l'inégalité annoncée.

□

3 Conséquence de la proposition 1.2

Le but de cette partie est d'établir la proposition 1.3, déjà établie dans [4].

Démonstration. Soit $\alpha\in]-1,0[$. Quitte à poser $g:=f-\displaystyle\int_{I_n}f(t)\,\mathrm{d}\mu_n(t)$ qui vérifie $\nabla(f)=\nabla(g)$, on suppose $\displaystyle\int_{I_n}f(t)\,\mathrm{d}\mu_n(t)=0$. Soit $\varepsilon>0$. Il est clair que si ε est assez petit, alors pour tout $x\in I_n$, $\varepsilon f(x)\geq\alpha$. La proposition 1.2 donne

$$\operatorname{Ent}(\mathbf{1}+\varepsilon f)\leq c_{\alpha,n}\int_{I_n}\nabla(\mathbf{1}+\varepsilon f)(x)^2\,\mathrm{d}\mu_n(x)=\varepsilon^2\int_{I_n}\nabla f(x)^2\,\mathrm{d}\mu_n(x),\tag{6}$$

où l'on a posé $c_{\alpha,n}:=\dfrac{1}{4\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}\times\left(\dfrac{n-2}{n}+\dfrac{1}{1+\alpha}\right)$. On a aussi :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ent}(\mathbf{1}+\varepsilon f)&=\int_{I_n}(1+\varepsilon f(x))\ln(1+\varepsilon f(x))\,\mathrm{d}\mu_n(x)\\&=\int_{I_n}(1+\varepsilon f(x))\left(\varepsilon f(x)-\frac{\varepsilon^2}{2}f(x)^2+O(\varepsilon^3)\right)\mathrm{d}\mu_n(x)\\&=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{I_n}f(x)^2\,\mathrm{d}\mu_n(x)+O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

On remarque que le $O(\varepsilon^3)$ est uniforme en x. Cette inégalité, utilisée avec l'inégalité (6), donne

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{I_n}f(x)^2\,\mathrm{d}\mu_n(x)+O(\varepsilon^3)\leq c_{\alpha,n}\varepsilon^2\int_{I_n}\nabla f(x)^2\,\mathrm{d}\mu_n(x).$$

En divisant par ε^2 et en faisant tendre ε vers 0^+, on obtient

$$\int_{I_n} f(x)^2 \, \mathrm{d}\mu_n(x) \leq \frac{1}{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \times \left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{1+\alpha}\right) \int_{I_n} \nabla f(x)^2 \, \mathrm{d}\mu_n(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in]-1,0[$, on fait tendre α vers 0^-, on récupère finalement

$$\int_{I_n} f(x)^2 \, \mathrm{d}\mu_n(x) \leq \frac{n-1}{n\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \int_{I_n} \nabla f(x)^2 \, \mathrm{d}\mu_n(x).$$

$\square$

Remarque 4. On remarque que l'argument utilisée est un argument « abstrait » : il n'est pas propre à la mesure μ_n. C'est un fait général : une mesure qui satisfait une inégalité de Sobolev logarithmique vérifie également aussi une inégalité de Poincaré.

Références

[1] D. Cordero-Erausquin, `https://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/Docs/M2/2009_2010/cours.html`.

[2] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975), no. 4, p. 1061-1083.

[3] J-E. Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation.* De Boeck, 2017.

[4] E. Thomas, *Inégalités sur le cercle discret.* Revue Quadrature numéro 121, 2021.