Chapitre 10 : Exercices

Exercice 1.

Soit $(a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5$. On considère la matrice $M = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & c \\ a & \sqrt{2} & d \\ \sqrt{3} & b & e \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Déterminer les éléments $(a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5$ tels que $M \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.
2. Déterminer les éléments $(a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5$ tels que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$.

Exercice 2.

Déterminer les matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 3.

Déterminer les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ayant des coefficients positifs.

Exercice 4.

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{R}_2[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit $\varphi : \mathbf{R}_2[X] \longrightarrow \mathbf{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = P(1-X)$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.
3. Montrer que φ est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.
4. Calculer le déterminant de φ.

Exercice 5.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathrm{O}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.
2. Montrer que si u est diagonalisable, alors u est une symétrie orthogonale.

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (i,j)$. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

1. $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$;
2. $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (i,j,k)$. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

1. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$;
2. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$;
3. $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}7 & 7 & 4\\ 4 & -8 & 1\\ -4 & -1 & 8\end{pmatrix}$;
4. $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-8 & 4 & 1\\ 4 & 7 & 4\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix}$.

Exercice 9.

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ pour que $A \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.
2. Pour chaque couple trouvé ci-dessus, étudier l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.

Exercice 10.

Diagonaliser en base orthonormée les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 11.

Dans $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, donner une expression explicite de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe dirigé par le vecteur $(1,1,1)$.

Exercice 12.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $MM^\top M = \mathrm{I}_n$.

1. Montrer que M est symétrique.
2. Montrer que $M = \mathrm{I}_n$.

Exercice 13.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^\top A = AA^\top$ et $p \in \mathbf{N}^\star$ tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que $S = AA^\top$ est nulle.
2. En déduire que $A = 0$.

Exercice 14.

Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}\left(MM^\top\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$.
2. On suppose que M est symétrique. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Exercice 15.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{O_n}(\mathbf{R})$.

On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de son produit scalaire usuel $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

1. Exprimer $\langle AU, U\rangle$ en fonction des coefficients de A.
2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leq n$.

Exercice 16.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Soit $M = A^\top A - AA^\top$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Montrer que A et $A^\top$ commutent si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbf{R}_+$.

Exercice 17.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. On suppose que $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbf{R}_+$.

1. Justifier qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^\top$.
2. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Soit $Y = P^\top X$. Montrer que $Y^\top Y = X^\top X$.
3. En notant $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ la plus petite et la plus grande valeur propre de M, montrer que

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \lambda_{\min} X^\top X \leq X^\top M X \leq \lambda_{\max} X^\top X.$$

Exercice 18.

Soit $\mathscr{P}$ un plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, i, j). Étudier les coniques définies par les équations suivantes dans le repère (O, i, j).

1. $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = 0$;
2. $\mathscr{C}_2 : x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$;
3. $\mathscr{C}_3 : 13x^2 - 32xy + 37y^2 - 5 = 0$;
4. $\mathscr{C}_4 : x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$.