Chapitre 10 : Isométries d'un espace euclidien

Contents

1 Matrices orthogonales

1.1 Généralités

Définition 1. *Matrice orthogonale.*
*Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A est **orthogonale** si $A^\top A = \mathrm{I}_n$.*
*On note $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n et on l'appelle le **groupe orthogonal**.*

Exemple 1. On a : $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ et $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R})$.

Remarque 1. Une matrice orthogonale est donc inversible et $A^{-1} = A^\top$.

Proposition 1. *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes (resp. ses lignes) forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ (resp. de $\mathbf{R}^n$) muni de son produit scalaire usuel.*

Proof. On sépare le cas des colonnes et celui des lignes.

Pour les colonnes. On écrit $A = (C_1|\cdots|C_n)$. On traite les deux sens de l'équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ En notant $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ (défini par $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$), par définition $A^\top A = \mathrm{I_n}$, donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad C_i^\top C_j = \langle C_i, C_j\rangle = \begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

La famille $(C_1,\ldots,C_n)$ est donc une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ pour le produit scalaire usuel.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si la famille $(C_1,\ldots,C_n)$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ pour son produit scalaire usuel, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $C_i^\top C_j = \langle C_i, C_j\rangle = \begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Ainsi, $A^\top A = \mathrm{I}_n$.

Pour les lignes. Il suffit de remarquer que si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, alors $A^\top \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

□

Proposition 2. *Propriétés des matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.*

(i) $\mathrm{I}_n \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ *;*

(ii) *si $(A,B) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})^2$, $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.*

Proof. (i) C'est clair.

(ii) On calcule

$$\begin{aligned}\left(AB^{-1}\right)^\top AB^{-1} &= \left(B^\top\right)^{-1} A^\top AB^{-1}\\ &= \left(B^\top\right)^{-1} B^{-1} \quad \text{car } A^\top A = \mathrm{I}_n\\ &= \left(BB^\top\right)^{-1}\\ &= \mathrm{I}_n.\end{aligned}$$

□

Proposition 3. *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $\mathscr{C}$ une autre base de E. $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de E si, et seulement si, la matrice de passage $\mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$ est orthogonale.*

Proof. On écrit $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1,\ldots,f_n)$.
On prouve séparemment les deux équivalences.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on écrit

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} e_j$$

de sorte que $P = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de C.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, par définition du produit matriciel, on a

$$\begin{aligned} \left(P^\top P\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} p_{k,i} p_{k,j} \\ &= \langle f_i, f_j \rangle \\ &= \delta_{i,j} \end{aligned}$$

où $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On en déduit que $P^\top P = \mathrm{I}_n$, donc $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ En reprenant le calcul ci-dessus, on remarque que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \langle f_i, f_j \rangle = \left(P^\top P\right)_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de E.

□

1.2 Matrices orthogonales positives et négatives

Proposition 4. *Déterminant d'une matrice orthogonale.*
Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, *alors* $|\det(A)| = 1$.

Proof. Comme $\det(A) = \det\left(A^\top\right)$, on a

$$1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det\left(A^\top A\right) = \det(A) \det\left(A^\top\right) = \det(A)^2.$$

□

Définition 2. *Matrices orthogonales positives et négatives.*
Une matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ *est dite* ***positive*** *(ou* ***directe****) si* $\det(A) = 1$ *et* ***négative*** *(ou* ***indirecte****) si* $\det(A) = -1$.

Définition 3. *Groupe spécial orthogonal.*
L'ensemble des matrices orthogonales positives s'appelle le ***groupe spécial orthogonal*** *d'ordre* n *et est noté* $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.

Remarque 2. La proposition 2 reste vraie pour les matrices de $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.

1.3 Orientation d'un espace euclidien

Définition 4. *Orientation de d'un espace euclidien.*
Un espace euclidien ***orienté*** *est un espace euclidien dans lequel on a choisit une base orthonormée.*

Remarque 3. La notion d'orientation est une notion qui dépend de la base choisie, ainsi il n'y a pas une façon d'orienter un espace.

Définition 5. *Base directe/indirecte.*
On suppose que E *est orienté par une base orthonormée* $\mathscr{C}$. *Soit* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de* E. *On dit que :*

(i) $\mathscr{B}$ *est* ***directe*** *si* $\mathrm{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$ *est de déterminant* 1 *;*

(ii) $\mathscr{B}$ *est* ***indirecte*** *si* $\mathrm{Pass}(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$ *est de déterminant* -1.

Exemple 2. Si l'espace $\mathbf{R}^3$ est orienté par la base canonique (i, j, k), les bases (i, j, k), (k, i, j) et (j, k, i) sont directes, alors que les bases (i, k, j), (k, j, i) et (j, i, k) sont indirectes.

2 Isométrie vectorielle

2.1 Généralités

Définition 6. *Isométrie vectorielle.*
*Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On dit que φ est une **isométrie vectorielle** si*

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| = \|x\|.$$

Exemple 3. Les applications $\pm \mathrm{id}_E$ sont des isométries de E.

Définition 7. *Groupe orthogonal.*
*L'ensemble des isométries vectorielles de E est appelé le **groupe orthogonal** de E et est noté $\mathrm{O}(E)$.*

Remarque 4. Si $f \in \mathrm{O}(E)$, par définition, il est clair que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, donc $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$.

Proposition 5. *Propriétés de $\mathrm{O}(E)$.*

(i) $\mathrm{id}_E \in \mathrm{O}(E)$ *;*

(ii) *si $(f,g) \in \mathrm{O}(E)^2$, $f \circ g^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.*

Proof. (i) C'est clair.

(ii) Soit $x \in E$. Comme $g \in \mathrm{GL}(E)$ (voir remarque 4), il existe $u \in E$ tel que $x = g(u)$. On a donc

$$\begin{array}{rcl} \left\|\left(f \circ g^{-1}\right)(x)\right\| & = & \left\|f\left(g^{-1}(x)\right)\right\| \\ & = & \left\|g^{-1}(x)\right\| \quad \text{car } f \in \mathrm{O}(E) \\ & = & \left\|g^{-1}(g(u))\right\| \\ & = & \|u\| \\ & = & \|g(x)\| \\ & = & \|x\| \quad \text{car } g \in \mathrm{O}(E) \end{array}$$

□

Théorème 1. *Caractérisation des isométries vectorielles.*
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions sont équivalentes :

(i) $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ *;*

(ii) *φ conserve le produit scalaire, i.e.*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle;$$

(iii) *l'image par φ d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E ;*

(iv) *l'image par φ de toute orthonormée de E est une base orthonormée de E.*

Proof. On va montrer (i) $\Longrightarrow$ (ii), (ii) $\Longrightarrow$ (iii), (iii) $\Longrightarrow$ (iv) et (iv) $\Longrightarrow$ (i).

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Soit $(x,y) \in E^2$. On utilise une formule de polarisation :

$$\begin{array}{rcl} \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle & = & \dfrac{1}{2}\left(\|\varphi(x+y)\|^2 - \|\varphi(x)\|^2 - \|\varphi(y)\|^2\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \quad \text{car } \varphi \in \mathrm{O}(E) \\ & = & \langle x, y \rangle \quad \text{formule de polarisation.} \end{array}$$

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)}}$ Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. On note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \left\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \right\rangle = \left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{i,j}.$$

Ainsi, $\varphi(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de E.

$\boxed{\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(iv)}}$ Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\varphi(\mathscr{B})$ soit une base orthonormée de E.

Soit $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une autre base orthonormée de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on écrit

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k.$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi(f_i), \varphi(f_j) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \varphi(e_k), \sum_{\ell=0}^{n} a_{\ell,j} \varphi(e_\ell) \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} a_{k,i} a_{\ell,j} \left\langle \varphi(e_k), \varphi(e_\ell) \right\rangle \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire.}
\end{aligned}$$

Or, $\varphi(\mathscr{B})$ est une base orthonormée, donc $\left\langle \varphi(e_k), \varphi(e_\ell) \right\rangle = \delta_{k,\ell}$, donc

$$\left\langle \varphi(f_i), \varphi(f_j) \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = \left\langle f_i, f_j \right\rangle = \delta_{i,j}$$

car $\mathscr{C}$ est une base orthonormée de E.

$\boxed{\text{(iv)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ Soit x un vecteur non nul de E. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre (x) en une base de E, disons $\mathscr{B} = (x, e_2, \dots, e_n)$.

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base. D'après le procédé, le premier vecteur de la base obtenue notée $\mathscr{C}$ est $\dfrac{1}{\|x\|} x$. On écrit $\mathscr{C} = \left(\dfrac{1}{\|x\|} x, f_2, \dots, f_n \right)$.

Par hypothèse, $\varphi(\mathscr{C})$ est une base orthonormée de E, donc $\left\| \varphi\left(\dfrac{1}{\|x\|} x \right) \right\| = 1$, soit $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.

Enfin, il est clair que $\|\varphi(0)\| = \|0\|$.

On a montré que $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.

□

Proposition 6. *Lien entre* $\mathrm{O}(E)$ *et* $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. $u \in \mathrm{O}(E)$ si, et seulement si, la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

Proof. On prouve l'équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ D'après le théorème 1, $u(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de E. De plus, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{mat}_{u(\mathscr{B}),\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to u(\mathscr{B})) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ d'après la proposition 3.

$\boxed{\Longleftarrow}$ D'après ci-dessus, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{mat}_{u(\mathscr{B}),\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Pass}(\mathscr{B} \to u(\mathscr{B}))$. D'après la proposition 3, $u(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de E. Le théorème 1 assure alors que $u \in \mathrm{O}(E)$.

□

Remarque 5. Une fois que l'on a fixé une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, l'application

$$\begin{cases} \mathrm{O}(E) & \longrightarrow \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \\ u & \longmapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{cases}$$

est bijective.

Proposition 7. *Stabilité de l'orthogonal.*
Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ et soit F un sous-espace de E stable par u. Alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Proof. Comme F est stable par u, on peut définir $u_{|F}$. Il est clair que $u_{|F}$ est une isométrie de F, donc $\mathrm{Ker}\left(u_{|F}\right) = \{0\}$ (voir remarque 4), donc $u_{|F}$ est un automorphisme de F.

Soit $x \in F^{\perp}$. Soit $y \in F$: il existe $z \in F$ tel que $y = u(z)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \langle u(x), y\rangle &= \langle u(x), u(z)\rangle \\ &= \langle x, z\rangle \quad \text{d'après le théorème 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a montré que $u(x)$ est orthogonal à tous les éléments de F, donc $u(x) \in F^{\perp}$, ainsi $F^{\perp}$ est stable par u. □

2.2 Isométries vectorielles positives et négatives

Proposition 8. *Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors* $\det(u) = \pm 1$.

Proof. C'est clair en utilisant les propositions 6 et 4. □

Définition 8. *Isométrie positive ou négative.*
*Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. On dit que u est une isométrie **positive** (ou **directe**) si* $\det(u) = 1$ *et **négative** (ou **indirecte**) si* $\det(u) = -1$.

Définition 9. *Groupe spécial orthogonale* $\mathrm{SO}(E)$.
*L'ensemble des isométries positives de E est appelé le **groupe spécial orthogonal** de E.*

Remarque 6. Les résultats de la proposition 5 restent vrais pour les éléments de $\mathrm{SO}(E)$.

2.3 Symétrie orthogonale

Définition 10. *Symétrie orthogonal.*
*Soit F un sous-espace vectoriel de E. La **symétrie orthogonale** sur F est la symétrie vectoriel sur F parallèlement à $F^{\perp}$.*

Remarque 7. Si l'on note s_F la projection orthogonale sur F et p_F la projection orthogonale sur F (donc parallèlement à $F^{\perp}$), on a $s_F = p_F - p_{F^{\perp}}$. Or, comme $p_F + p_{F^{\perp}} = \mathrm{id}_E$, on en déduit que $s_F = 2p_F - \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - 2p_{F^{\perp}}$.

Proposition 9. *Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.*

Proof. Soit $x \in E$: il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. D'après le théorème de Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Or, $s_f(x) = y - z$, donc $\|s_F(x)\| = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$. □

Exemple 4. Dans $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, donnons une expression de la symétrie orthogonale sur la droite $D = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$.

La famille $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ est une base orthonormée de D. D'après la remarque 7, on a

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad s_D(x, y, z) &= 2\left\langle (x, y, z), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) - (x, y, z) \\ &= \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z). \end{aligned}$$

Définition 11. *Réflexion.*
*Une **réflexion** est une symétrie sur un hyperplan de E.*

Proposition 10. *Expression des réflexions.*
Soit u une réflexion sur un hyperplan F. Soit $y \in F^{\perp}$ et x non nul. Alors,

$$\forall x \in E, \quad s_F(x) = x - \frac{2}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle\, y.$$

Proof. D'après la remarque 7, on a $s_F = \mathrm{id}_E - 2p_{F^\perp}$, il suffit donc de donner une expression de $p_{F^\perp}$.
Comme $\dim\left(F^\perp\right) = 1$, la famille $\left(\frac{1}{\|y\|}y\right)$ est une base orthonormée de $F^\perp$. Ainsi

$$\forall x \in E, \quad p_{F^\perp}(x) = \left\langle x, \frac{1}{\|y\|}y\right\rangle \frac{1}{\|y\|}y = \frac{1}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle\, y.$$

On en déduit que

$$\forall x \in E, \quad s_F(x) = x - \frac{2}{\|y\|^2}\langle x, y\rangle\, y.$$

□

Exemple 5. Dans $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, donnons une expression de la symétrie orthogonale sur le plan $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x+y+z=0\right\}$.
Il est clair que le vecteur $(1,1,1) \in P^\perp$. D'après la proposition 10, on a

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad s_P(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{2}{\|(1,1,1)\|^2}\langle (x,y,z), (1,1,1)\rangle (1,1,1)\\ &= \frac{1}{3}(-x-2y-2z, -2x-y-2z, -2x-2y-z).\end{aligned}$$

3 Classification des isométries vectorielles

3.1 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Soit E un plan euclidien dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée. E est donc orienté.

Proposition 11. *Caractérisation des isométries d'un plan euclidien.*
Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas, $u \in \mathrm{SO}(E)$, alors que dans le second cas, $u \in \mathrm{O}(E)\backslash\mathrm{SO}(E)$.

Proof. On procède par analyse/synthèse.

Analyse. D'après le théorème 1, $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthonormée de E. On écrit

$$u(e_1) = ae_1 + be_2 \quad \text{et} \quad u(e_2) = ce_1 + de_2.$$

Comme $\|u(e_1)\| = a^2 + b^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. De même, il existe $\psi \in \mathbf{R}$ tel que $c = \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\psi)$ et $d = \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\psi)$.
Or $\langle u(e_1), u(e_2)\rangle = ac + bd = 0$, donc

$$-\cos(\theta)\sin(\psi) + \sin(\theta)\cos(\psi) = \sin(\theta - \psi) = 0.$$

Ainsi, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta = \psi + k\pi$. On discute suivant la parité de k.

(a) Si k est pair, alors
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(b) Si k est impair, alors
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Synthèse. Réciproquement, il est clair que les matrices de la forme
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
appartiennent respectivement à $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ (donc $u \in \mathrm{SO}(E)$) et à $\mathrm{O}_2(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ (donc $u \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$).

□

Remarque 8. En utilisant la remarque 5, on en déduit que
$$\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbf{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{O}_2(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

Proposition 12. *Propriétés des matrices R_θ.*
Soit $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$. On a
$$R(\theta) R(\theta')^{-1} = R(\theta - \theta').$$

Proof. On a :
$$\begin{aligned} R(\theta) R(\theta')^{-1} &= R(\theta) R(\theta')^\top \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & \sin(\theta') \\ -\sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') - \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta') & -\sin(\theta - \theta') \\ \cos(\theta - \theta') & \sin(\theta - \theta') \end{pmatrix} \\ &= R(\theta - \theta'). \end{aligned}$$

□

Proposition 13. *Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$. Il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ de E, on a*
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = R_\theta.$$

Proof. D'après la proposition 11, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = R_\theta$.
Soit $\mathscr{B}'$ une base orthonormée directe de E. Il existe $\theta' \in \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = R_{\theta'}$.
On note $P = \mathrm{Pass}(\mathscr{B}' \to \mathscr{B}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E)$ de sorte que $R_\theta = P R_{\theta'} P^{-1}$.
Par la proposition 3 et la définition 5, $P \in \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$. D'après la remarque 8, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $P = R_\alpha$.
La proposition 12, on a
$$R_\theta = R_{\alpha + \theta' - \alpha} = R_{\theta'}.$$

□

Définition 12. *Rotation, angle d'une rotation.*

(i) *Les éléments de $\mathrm{O}(E)$ s'appellent des **rotations**.*

(ii) *D'après la proposition 13, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ de E, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = R_\theta$.*
*Par 2π-périodicité des fonctions $\cos$ et $\sin$, il existe un unique élément $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = R_\theta$. θ s'appelle l'**angle** de la rotation.*

Proposition 14. *Composition de deux rotations du plan.*

Soient u et v deux rotations du plan d'angles respectifs θ et ψ. Alors $u \circ v$ est une rotation d'angle $\theta + \psi$.

Proof. C'est clair d'après la proposition 12. □

Proposition 15. *Réduction des éléments de* $\mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$.

Soit $u \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Proof. D'après la proposition 11, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ et une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Il est alors clair que $u^2 = \mathrm{id}_E$, donc u est une symétrie. Comme $\det(u) = -1$, $u \neq \mathrm{id}_E$. Soit $f_1 \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $f_2 \in \operatorname{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$ tous les deux de norme 1. Il est clair que la matrice de u dans la base (f_1, f_2) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour montrer que (f_1, f_2) est une base de E, il suffit de prouver que $\langle f_1, f_2 \rangle$. On a

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \langle u(f_1), -u(f_2) \rangle \\ &= -\langle f_1, f_2 \rangle \quad \text{car } u \in \mathrm{SO}(E). \end{aligned}$$

Ainsi $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$.

□

Exemple 6. $\mathbf{R}^2$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $\mathscr{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$, orthonormée pour ce produit scalaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de f ?

Il est clair que $\det(f) = 1$, ainsi f est une rotation de $\mathbf{R}^2$. Soit θ l'angle de cette rotation. θ vérifie $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ainsi $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Exemple 7. $\mathbf{R}^2$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $\mathscr{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$, orthonormée pour ce produit scalaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de f ?

Il est clair que $\det(f) = -1$, donc f est une symétrie orthogonale. Pour préciser ses éléments caractéristiques, on donne $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$ et $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}) = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})^{\perp}$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - \mathrm{I}_2) &\iff \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff -2x + 4y = 0 \\ &\iff x = 2y \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Vect}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2i + j)\right)$. On a aussi $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = \operatorname{Vect}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}(i - 2j)\right)$.

3.2 Isométries vectorielles en dimension 3

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée.

Proposition 16. *Caractérisation des isométries positives de E.*

Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proof. On procède par analyse/synthèse.

$\boxed{\textit{Analyse.}}$ On note $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{id}_E - u)$. χ_u est une fonction polynomiale de degré 3. Ainsi, ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont opposées.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, χ_u s'annule en une certaine valeur $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ qui est une valeur propre de u. On note e_1 un vecteur propre unitaire pour la valeur propre λ_0. Comme $u \in \mathrm{SO}(E)$, on a

$$1 = \|e_1\| = \|u(e_1)\| = \|\lambda_0 e_1\| = |\lambda_0|.$$

On en déduit que $|\lambda_0| = 1$, soit $\lambda_0 = \pm 1$.

On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1)$. D'après la proposition 7, $F^\perp$ est stable par u.

On discute maintenant suivant la valeur de λ_0.

(a) Si $\lambda_0 = 1$. Il est clair que $u_{|F^\perp}$, ainsi, d'après la proposition 11 et la proposition 15, il existe une base orthonormée (e_2, e_3) de $F^\perp$ telle que

$$\mathrm{mat}_{(e_2,e_3)}\left(u_{|F^\perp}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mat}_{(e_2,e_3)}\left(u_{|F^\perp}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De sorte que la matrice de u dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or, $\det(u) = 1$ et $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$, ainsi

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(b) Si $\lambda_0 = -1$. Il est clair que $u_{|F^\perp}$, ainsi, d'après la proposition 11 et la proposition 15, il existe une base orthonormée (e_2, e_3) de $F^\perp$ telle que

$$\mathrm{mat}_{(e_2,e_3)}\left(u_{|F^\perp}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mat}_{(e_2,e_3)}\left(u_{|F^\perp}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De sorte que la matrice de u dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or, $\det(u) = 1$ et $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = -1$, ainsi

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de u dans la base orthonormée (e_2, e_1, e_3) est alors

$$\mathrm{mat}_{(e_2,e_1,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\theta = \pi$.

Synthèse. La synthèse est claire, si la matrice de u dans une base orthonormée de E est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, alors $u \in \mathrm{SO}(E)$.

□

Proposition 17. *Caractérisation des isométries négatives de E.*

Soit $u \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proof. Comme $-u \in \mathrm{O}(E)$, d'après la proposition 16 il existe $\alpha \in \mathbf{R}$, une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(-u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où l'on a posé $\theta = \alpha + \pi$.

□

Exemple 8. $\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, orthonormée pour ce produit scalaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de f ?

On remarque facilement que $\det(f) = 1$, donc f est une rotation de l'espace. Il nous reste à préciser les éléments caractéristiques : l'axe de la rotation et son angle. Notons que l'axe de la rotation est la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z & = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z & = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z & = 0 \\ -8z & = 0 \end{cases} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - \sqrt{6}L_1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & = y \\ z & = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i + j)\right)$. On pose $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$.

Il nous reste à déterminer l'angle θ. Comme il existe une base orthonormée $\mathscr{C}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base $\mathscr{C}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, on en déduit que θ vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(f) = 2$, soit $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$.

Pour déterminer l'angle de la rotation, il suffit d'avoir le signe de $\sin(\theta)$. Soient e_2 et e_3 deux vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^3$ tels que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Soit $u \in \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ unitaire. On écrit $u = \alpha e_2 + \beta e_3$. On a $f(u) = (\alpha\cos(\theta) - \beta\sin(\theta))\, e_2 + (\alpha\sin(\theta) + \beta\cos(\theta))\, e_3$. Ainsi

$$[e_1, u, f(u)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha\cos(\theta) - \beta\sin(\theta) \\ 0 & \beta & \alpha\sin(\theta) + \beta\cos(\theta) \end{vmatrix} = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\sin(\theta) = \sin(\theta).$$

Dans cet exemple, en prenant $u = k$ de sorte que $f(u) = \frac{\sqrt{6}}{4}i - \frac{\sqrt{6}}{4}j + \frac{1}{2}k$, on a

$$\sin(\theta) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j), k, \frac{\sqrt{6}}{4}i - \frac{\sqrt{6}}{4}j + \frac{1}{2}k\right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On en déduit $\theta = \frac{\pi}{3}$.

f est la rotation d'axe dirigé par $i + j$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exemple 9. $\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, orthonormée pour ce produit scalaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$. Quelle est la nature géométrique de f ?

On remarque que $\det(f) = -1$, ainsi $f \in \mathrm{O}_3(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$.

On commence par déterminer $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A + \mathrm{I}_3) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 16x + 4y + 4y & = 0 \\ -4x + 17y - z & = 0 \\ 4x + y + z & = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + y + z & = 0 \\ -4x + 17y - z & = 0 \end{cases} \quad \text{car } L_1 = 4L_3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + y + z & = 0 \\ 18y & = 0 \end{cases} \quad L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} z & = -4x \\ y & = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}(i - 4k)\right)$. On pose $e_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(i - 4k)$.

Il nous reste à déterminer l'angle θ. Comme il existe une base orthonormée $\mathscr{C}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base $\mathscr{C}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, on en déduit que θ vérifie $-1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(f) = \frac{7}{9}$, soit $\cos(\theta) = \frac{8}{9}$.

Pour déterminer l'angle de la rotation, il suffit d'avoir le signe de $\sin(\theta)$. Soient e_2 et e_3 deux vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^3$ tels que la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) soit $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Si u est un vecteur unitaire de $\operatorname{Vect}(e_2, e_3)$, comme ci-dessus, on remarque que $\sin(\theta) = [e_1, u, f(u)]$.

Ainsi, en prenant $u = j$ de sorte que $f(j) = \frac{4}{9}i + \frac{8}{9}j + \frac{1}{9}k$, on a

$$\sin(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{9} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{17}}{9} > 0.$$

On en déduit que $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{8}{9}\right)$.

4 Réduction des matrices symétriques réelles

Dans cette section, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui, rappelons-le, est défini par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y.$$

Définition 13. *Matrice symétrique.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On rappelle que A est ***symétrique*** *si $A^\top = A$.*

Proposition 18. *Existence de valeur propre réelle pour les matrices symétriques réelles.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors, $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbf{R}$.

Proof. Admis.

□

Proposition 19. *Orthogonalité des sous-espaces propres*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique.
Les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont deux à deux orthogonaux.

Proof. On note $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$.
Soit $(X_i, X_j) \in E_{\lambda_i}(A) \times E_{\lambda_j}(A)$.
D'une part, on a

$$\langle AX_i, X_j \rangle = \lambda_i \langle X_i, X_j \rangle.$$

D'autre part,

$$\langle AX_i, X_j \rangle = (AX_i)^\top X_j = X_i^\top A^\top X_j = X_i^\top A X_j = \langle X_i, AX_j \rangle = \lambda_j \langle X_i, X_j \rangle.$$

On en déduit que $\lambda_i \langle X_i, X_j \rangle = \lambda_j \langle X_i, X_j \rangle$, soit $(\lambda_i - \lambda_j) \langle X_i, X_j \rangle = 0$.
Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a $\langle X_i, X_j \rangle = 0$.

□

Exemple 10. Les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de la matrice symétrique réelle $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Théorème 2. *Théorème spectral.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. Il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et une matrice D diagonale telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top.$$

Proof. Admis.

□

Remarque 9. Le résultat est **faux** pour les matrices symétriques complexes. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique mais pas diagonalisable.

Il existe néanmoins un résultat analogue, mais il faudrait définir la notion de matrice hermitienne.

Exemple 11. On se propose de diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = (\lambda - 3)^2 (\lambda + 3)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 3\}$.

(i) $\lambda = -3$. On a

$$-3\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

La matrice est de rang 2 et, en notant C_1, C_2 et C_3 ses colonnes, on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$. Ainsi $E_{-3}(A) = \mathrm{Ker}(-3\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (on prend un vecteur de norme 1).

(ii) $\lambda = 3$. On a

$$3\mathrm{I}_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice est de rang 1 et en notant C_1, C_2 et C_3 ses colonnes, on remarque que $C_1 - C_2 = 0$ et $C_1 - C_3 = 0$. Il s'ensuit que $E_3(A) = \mathrm{Ker}(3\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de $E_3(A)$. On pose $X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On cherche $\widetilde{Y}$ sous la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On cherche α tel que

$$\left\langle \widetilde{Y}, X \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha = 0.$$

On a donc $\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On pose $Y = \frac{1}{\left\|\widetilde{Y}\right\|} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a finalement

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

On pose

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

de sorte que l'on ait $A = PDP^{-1} = PDP^{\top}$.

5 Application à l'étude des coniques

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats de la partie précédente pour étudier un lieu géométrique.

Dans toute cette partie, un plan euclidien $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, i, j).

Définition 14. *Conique.*

Une conique de $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbf{R}^6$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Proposition 20. *Classification des coniques.*

On reprend les notations de la définition 14. Une conique du plan $\mathscr{P}$ est parmi l'une des huit suivantes :

(i) *l'ensemble vide (équation du type $x^2 + y^2 = -1$) ;*

(ii) *un point (équation du type $x^2 + y^2 = 0$) ;*

(iii) *une droite (équation du type $x = 3$) ;*

(iv) *deux droites parallèles (équation du type $y^2 = 5$) ;*

(v) *deux droites sécantes (équation du type $x^2 - y^2 = 0$) ;*

(vi) *une parabole (équation du type $x = y^2 + 3$) ;*

(vii) *une hyperbole (équation du type $x^2 - 3y^2 = 1$) ;*

(viii) *une ellipse (équation du type $x^2 + 3y^2 = 1$).*

Proof. Admis. □

Exemple 12. On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_1$ du plan $\mathscr{P}$ dont une équation est

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0.$$

L'équation ci-dessus se réécrit en

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6 = 0.$$

La matrice A est symétrique réelle, on peut la diagonaliser en base orthonormée. Ses valeurs propres sont 2 et 4 et

$$E_2(A) = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_4(A) = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc écrire

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top$$

avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ et $D = \operatorname{diag}(2, 4)$.

On pose donc $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + j)$.

Pour obtenir une équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2), on procède au changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dans l'équation de la conique. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6 = 0 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^\top P^\top A P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^\top D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
&\iff \quad 2u^2 + 4v^2 + 8\sqrt{2}v + 6 = 0 \\
&\iff \quad u^2 + 2\left(v + \sqrt{2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la conique étudiée est une ellipse dont le centre a pour coordonnées $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ dans le repère (O, e_1, e_2), soit pour coordonnées $(1, -1)$ le repère (O, i, j).

0 $\mathscr{C}_1$ $\mathscr{C}_2$

−1 0 1 2

−1

−2

Figure 1: Une ellipse.

Exemple 13. On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_2$ du plan $\mathscr{P}$ dont une équation est

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y = 0.$$

L'équation ci-dessus se réécrit en

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

La matrice A est symétrique réelle, on peut la diagonaliser en base orthonormée. Ses valeurs propres sont 0 et 25 et

$$E_0\left(A\right) = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{25}\left(A\right) = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc écrire

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top$$

avec $P = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2\left(\mathbf{R}\right)$ et $D = \operatorname{diag}\left(0, 25\right)$.

On pose donc $e_1 = \dfrac{1}{5}\left(3i + 4j\right)$ et $e_2 = \dfrac{1}{5}\left(-4i + 3j\right)$.

Pour obtenir une équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2), on procède au changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dans l'équation de la conique. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^\top P^\top A P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^\top D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \quad 25v^2 - 25u - 50v = 0 \\
&\iff \quad u = v^2 - 2v \\
&\iff \quad u = (v-1)^2 - 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la conique étudiée est une parabole dont le sommet a pour coordonnées $(-1, 1)$ dans le repère (O, e_1, e_2), soit pour coordonnées $(-7/5, -1/5)$ le repère (O, i, j).

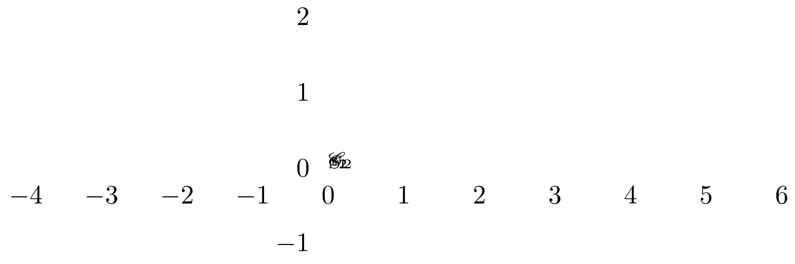

Figure 2: Une parabole.

Exemple 14. On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_3$ du plan $\mathscr{P}$ dont une équation est

$$x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 - 5 = 0.$$

L'équation ci-dessus se réécrit en

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0.$$

La matrice A est symétrique réelle, on peut la diagonaliser en base orthonormée. Ses valeurs propres sont 4 et -8 et

$$E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-8}(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc écrire

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top$$

avec $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ et $D = \mathrm{diag}(4, -8)$.

On pose donc $e_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}i + j\right)$ et $e_2 = \frac{1}{2}\left(-i + \sqrt{3}j\right)$.

Pour obtenir une équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2), on procède au changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dans l'équation de la conique. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^\top P^\top A P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0 \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^\top D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - 5 = 0 \\
&\iff \quad 4u^2 - 8v^2 - 5 = 0 \\
&\iff \quad \frac{u^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} - \frac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la conique étudiée est une hyperbole dont le centre a pour coordonnées $(0, 0)$ dans le repère (O, e_1, e_2) soit $(0, 0)$ dans le repère (O, i, j).

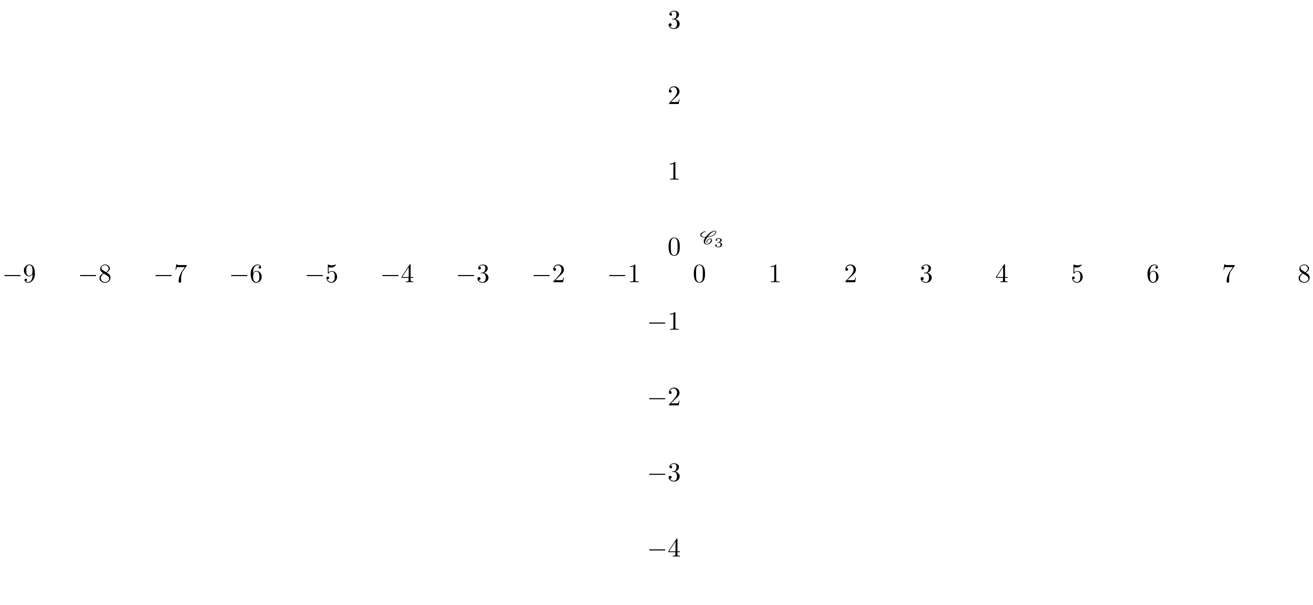

Figure 3: Une hyperbole.

6 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent servir pour les concours.

6.1 Matrices symétriques positives/définies positives

Dans toute cette sous-partie, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot,\rangle$ qui, rappelons-le, est défini par :

$$\forall (X,Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2, \quad \langle X,Y\rangle = X^\top Y.$$

Définition 15. *Matrice symétrique positive, définie positive.*

Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. On dit que S est ***positive*** *(resp.* ***définie positive****), si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul, $\langle SX,X\rangle \geq 0$ (resp. $\langle SX,X\rangle > 0$).*

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices positives (resp. définies positives).

Les matrices symétrique positives et définies positives se caractérisent facilement à l'aide du spectre.

Proposition 21. *Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$) si, et seulement si,* $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+$ *(resp.* $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+^\star$*).*

Proof. On traite seulement la première équivalence : $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+$. L'autre équivalence se traite de manière analogue.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$. Soit X un vecteur propre associé. Par hypothèse $\langle SX,X\rangle \geq 0$. Or,

$$\langle SX,X\rangle = \langle \lambda X,X\rangle = \lambda \|X\|^2.$$

Ainsi, $\lambda = \dfrac{\langle SX,X\rangle}{\|X\|^2} \geq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leurs ordres de multiplicité. On note $X_1,\dots,X_n$ des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Comme S est diagonalisable (théorème spectral), la famille $(X_1,\dots,X_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, ainsi il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$. On a donc

$$\langle SX,X\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i\lambda_i X_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \|X_i\|^2 \geq 0$$

car pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geq 0$.

$\square$

Proposition 22. *Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, alors $A^\top A$ et $AA^\top$ appartiennent à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.*

Remarque 10. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, alors $A^\top A$ et $AA^\top$ sont encore symétriques positives.

Proof. On a $\left(A^\top A\right)^\top = A^\top \left(A^\top\right)^\top = A^\top A$, ainsi $A^\top A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul. On a

$$\left\langle A^\top AX, X\right\rangle = \left(A^\top AX\right)^\top X = X^\top A^\top AX = (AX)^\top AX = \langle AX, AX\rangle = \|AX\|^2 > 0$$

car $AX \neq 0$ car A est inversible et X non nul. Ainsi, $A^\top A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.
On montre de même que $AA^\top \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

$\square$

Proposition 23. *Caractérisation des produits scalaires.*
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Soit φ_A l'application définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \varphi_A(X, Y) = \langle AX, Y\rangle .$$

Alors, φ_A est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Remarque 11. En fait, on peut être plus précis et montrer que **tout** produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est de la forme φ_A pour une certaine matrice $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Proof. On traite séparemment les deux implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ La linéarité par rapport à chacune des variables est claire. De même, la symétrie de φ_A est claire.
Comme φ_A est positive et définie positive, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul, on a $\langle AX, X\rangle = \varphi_A(X, X) = \|X\|_A > 0$ où $\|\cdot\|_A$ est la norme associée au produit scalaire φ_A.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La bilinéarité et la symétrie de φ_A sont clairs.
Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a bien $\varphi_A(X, X) = \langle AX, X\rangle \geq 0$
De plus, si $\varphi_A(X) = 0$, alors $X = 0$ car si $X \neq 0$, comme $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, on aurait $\varphi_A(X) = \langle AX, X\rangle > 0$.

$\square$

6.2 Racine carrée de matrices symétriques positives

Proposition 24. *Racine carrée de matrice symétrique positive.*
Soit $A \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$. Il existe une unique matrice $B \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.
On note $B = \sqrt{A}$ ***en n'oubliant pas qu'il ne s'agit que d'une notation****.*
De plus, si $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors $\sqrt{A} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Remarque 12. Cette proposition assure que les matrices symétriques se comportent comme les nombres positifs.

Proof. On sépare l'existence de l'unicité.

$\boxed{\textit{Existence.}}$ D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et D diagonale telle que $A = PDP^{-1} = PDP^P$.
D'après la proposition 21, les coefficients de D, disons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sont positifs.
Soit $B = P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^\top$. On a

$$B^\top = \left(P^\top\right)^\top \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)^\top P^\top = P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^\top = B.$$

De plus,

$$B^2 = P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^\top P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^\top = P(\lambda_n, \ldots, \lambda_n) P^\top = A.$$

Unicité. En reprenant les notations de l'existence, on pose $B_1 = P\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right) P^\top$. On a $B_1^2 = A$.

Supposons qu'il y existe une autre matrice symétrique positives B_2 telle que $B_2^2 = A$.

On a $B_2 A = B_2^3 = AB_2$, donc B_2 commute avec A. On montre de même B_2 commute avec A^i pour tout $i \in \mathbf{N}$, puis A commute avec $Q(A)$ pour tout $Q \in \mathbf{R}[X]$.

En choisissant $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

Or, $Q(A) = Q\left(PDP^{-1}\right) = PQ(D)P^{-1} = P\mathrm{diag}\left(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)\right)P^{-1} = B_1$, ainsi B_2 et B_1 commutent.

D'après le corollaire 8 du chapitre 5 Réduction des endomorphismes , B_1 et B_2 sont diagonalisables dans une même base : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et deux matrices diagonales D_1 et D_2 telles que

$$B_1 = PD_1P^{-1} \quad \text{et} \quad B_2 = PD_2P^{-1}.$$

Or, $B_1^2 = B_2^2 = A$, donc $D_1^2 = D_2^2$, puis comme les coefficients de D_1 et D_2 sont positifs (car B_1 et B_2 appartiennent à $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$), on en déduit $D_1 = D_2$, puis $B_1 = B_2$.

□

6.3 Décomposition polaire

Proposition 25. *Décomposition polaire.*
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Il existe un unique couple $(S, O) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \times \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$.

Remarque 13. La décomposition polaire est à rapprocher de l'écriture exponentielle $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour les nombres complexes.

Proof. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
On procède par analyse/synthèse.

Analyse. On suppose qu'une telle décomposition existe : il existe un couple $(S, O) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \times \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $A = OS$.

On a alors $A^\top = (OS)^\top = S^\top O^\top = SO^\top$ car S est symétrique. Il s'ensuit que $A^\top A = SO^\top OS = S^2$. D'après la proposition 24, il existe une unique matrice $U \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $U^2 = S$.

Il s'ensuit que $O = AS^{-1} = AU^{-2}$.

Synthèse. On reprend les matrices U et O définies ci-dessus : $S = \sqrt{A^\top A}$ et $O = AS^{-1}$. Il est clair que $OS = A$.

Comme $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $A^\top A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ (proposition 22).

Puis, $O^\top O = \left(AS^{-1}\right)^\top AS^{-1} = S^{-1}A^\top AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathrm{I}_n$, ainsi $O \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

□