

Chapitre 9 : Espaces préhilbertiens réels

Table des matières

1 Généralités	2
1.1 Produit scalaire	2
1.2 Norme associée à un produit scalaire	3
2 Orthogonalité	5
2.1 Vecteurs et sous-espaces orthogonaux	5
2.2 Familles orthogonales et orthonormées	7
2.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	7
3 Projection orthogonale	9
3.1 Projection sur un sous-espace vectoriel	9
3.2 Distance à un sous-espace vectoriel	11
4 Compléments	12
4.1 Matrice et déterminant de Gram	12
4.2 Polynômes d'Hermite	13

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur \mathbf{R} .

1 Généralités

1.1 Produit scalaire

Définition 1. *Produit scalaire.*

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ une application. On dit que φ est un **produit scalaire** sur E si :

- (i) φ est **linéaire à gauche** : pour tout $y \in E$, $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire ;
- (ii) φ est **linéaire à droite** : pour tout $x \in E$, $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire ;
- (iii) φ est **symétrique** : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- (iv) φ est **positive** : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$;
- (v) φ est **définie** : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.

⚠ Attention de ne pas parler de la linéarité d'un produit scalaire. Un produit scalaire est linéaire à gauche et à droite mais **n'est pas** linéaire.

Remarque 1. Si le point (iii) est vérifié, les points (i) et (ii) sont équivalents.

Remarque 2. Une récurrence immédiate montre alors que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et pour tout $(y_1, \dots, y_m) \in E^m$, on a

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^m y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle x_i, y_j \rangle.$$

Exemple 1. Les exemples suivants sont fondamentaux et à connaître.

- (i) Le produit scalaire canonique sur $E = \mathbf{R}^n$ est défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

- (ii) Si $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, l'application φ définie par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})^2, \quad \varphi(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

- (iii) Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'application φ définie par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad \varphi(A, B) = \text{Tr}(AB^\top)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- (iv) Si $E = \mathbf{R}_n[X]$, l'application φ définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0)$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Le produit scalaire est rarement noté φ . On le note $\langle \cdot, \cdot \rangle$, (\cdot, \cdot) ou plus simplement \cdot .

Définition 2. *Espace préhilbertien réel/espace vectoriel euclidien.*

Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{R} muni d'un produit scalaire. On dit que E est un **espace préhilbertien réel**.

Si l'on suppose que E est de dimension finie, E est alors un **espace euclidien**.

1.2 Norme associée à un produit scalaire

Dans toute la suite du chapitre, E est muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 3. Norme associée à un produit scalaire.

La norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Exemple 2. La norme associée au produit scalaire canonique de \mathbf{R}^n est

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Proposition 1. Propriétés de la norme.

La norme $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ vérifie les propriétés suivantes.

- (i) La norme est **positive** : pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$.
- (ii) La norme vérifie la **propriété de séparation** : pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.
- (iii) La norme vérifie la **propriété d'homogénéité** : pour tout $x \in E$ et pour tout réel λ , $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Démonstration. Les preuves découlent immédiatement des définitions 1 et 3. □

Proposition 2. Identités remarquables.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

- (i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$;
- (ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$;
- (iii) $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y \rangle$.

Démonstration. On prouve seulement (i), les preuves de (ii) et (iii) sont analogues.

Soit $(x, y) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle && \text{par définition de la norme} \\ &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle && \text{par linéarité à gauche} \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle && \text{par linéarité à droite} \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle && \text{par symétrie} \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 && \text{par définition de la norme.} \end{aligned}$$

□

On en déduit alors la proposition suivante.

Proposition 3. Identité de polarisation.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right).$$

Démonstration. D'après la proposition 2, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

autrement dit

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right).$$

□

Proposition 4. Identité du parallélogramme.

Soit $(x, y) \in E^2$. On a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right).$$

Démonstration. D'après la proposition 2, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

En sommant ces deux égalités, on trouve le résultat souhaité. \square

Remarque 3. Cette égalité peut ne pas paraître intéressante car elle découle uniquement des identités remarquables pour le produit scalaire. Il n'en est rien ! D'une certaine façon, elle « caractérise » le produit scalaire.

La proposition suivante est fondamentale et riche d'applications.

Proposition 5. *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Démonstration. On traite séparément l'inégalité du cas d'égalité.

Inégalité. Si $x = 0$, l'inégalité est claire.

On suppose donc $x \neq 0$ et on introduit $P : t \in \mathbf{R} \mapsto \|tx + y\|^2$. D'après la proposition 2, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad P(t) = \|tx\|^2 + 2 \langle tx, y \rangle + \|y\|^2.$$

Par propriétés sur la norme et le produit scalaire, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad P(t) = \|x\|^2 t^2 + 2 \langle x, y \rangle t + \|y\|^2.$$

Comme $x \neq 0$, on a $\|x\| \neq 0$, ainsi P est une fonction polynomiale de degré 2 et, par définition, $P(t) \geq 0$ pour tout réel t . Le discriminant de P est donc négatif, ainsi

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \|x\| \|y\| \leq 0.$$

On conclut en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur \mathbf{R}_+ .

Cas d'égalité. Si $x = 0$, il y a clairement égalité. On remarque alors que x et y sont colinéaires.

On suppose $x \neq 0$. Supposons que l'inégalité soit une égalité. En reprenant la fonction polynomiale P introduite ci-dessus, son discriminant vaut donc 0 : il existe un (unique) réel t_0 tel que $P(t_0) = \|t_0 x + y\|^2 = 0$, soit $t_0 x + y = 0$. Les vecteurs x et y sont donc colinéaires.

Réciproquement, si x et y sont colinéaires, il est clair que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité. \square

Exemple 3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbf{R}^n muni de son produit scalaire usuel se réécrit en

$$\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

Exemple 4. Si l'on munit $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t) g(t) dt$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit en

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}) \times \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}), \quad \left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

Proposition 6. *Inégalité triangulaire.*

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

L'inégalité triangulaire est une égalité si, et seulement si, $x = 0$ ou s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$.

Démonstration. Comme dans la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sépare la preuve de l'inégalité de la preuve du cas d'égalité.

Inégalité. Soit $(x, y) \in E^2$. D'après la proposition 2, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$. Ainsi,

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

La croissance de la fonction racine carrée et la positivité de la norme permet de conclure.

Cas d'égalité. On remarque déjà que l'inégalité triangulaire est une égalité lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.

Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité triangulaire avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

D'après la preuve ci-dessus, si l'inégalité triangulaire est une égalité, on a $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$, en particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité. D'après la proposition 5, les vecteurs x et y sont colinéaires. Comme x et y sont non nuls, il existe un réel λ tel que $y = \lambda x$.

En remplaçant y par λx dans $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$, et en utilisant les propriétés usuelles sur le produit scalaire et la norme, on a

$$\lambda \langle x, x \rangle = |\lambda| \|x\| \|y\|.$$

Comme $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \neq 0$, on en déduit que $\lambda = |\lambda|$, donc $\lambda \geq 0$.

Réciproquement, si $x = 0$, l'inégalité triangulaire est clairement une égalité. Lorsque $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$, d'une part, on a

$$\|x + y\| = \|(1 + \lambda)x\| = |1 + \lambda| \|x\| = (1 + \lambda) \|x\|$$

car $1 + \lambda \geq 0$. D'autre part, comme $\lambda \geq 0$, on a

$$\|x\| + \|y\| = \|x\| + \|\lambda x\| = \|x\| + |\lambda| \|x\| = \|x\| + \lambda \|x\| = (1 + \lambda) \|x\|.$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire.

□

Définition 4. Distance associée à un produit scalaire.

La **distance** associée à un produit scalaire sur E est l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs et sous-espaces orthogonaux

Définition 5. Vecteurs orthogonaux.

Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que les vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemple 5. Si l'on munit $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^\pi f(t)g(t) dt$, les vecteurs \cos et \sin sont orthogonaux car

$$\int_0^\pi \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(2t) dt = 0.$$

Proposition 7. Théorème de Pythagore.

Soit $(x, y) \in E^2$. Les vecteurs x et y sont orthogonaux si, et seulement si, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 2. On a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 &\iff \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &\iff \langle x, y \rangle = 0 \\ &\iff x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux.} \end{aligned}$$

□

Définition 6. *Sous-espaces orthogonaux.*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **orthogonaux** si

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Exemple 6. Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB^\top)$, les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

La proposition n'est pas toujours facile à manipuler. Lorsque F et G sont de dimension finie, on peut se ramener à montrer l'orthogonalité d'un nombre fini de vecteurs.

Proposition 8. *Orthogonalité en dimension finie.*

Soient F et G deux sous-espaces de dimension finie dont on note respectivement (f_1, \dots, f_n) et (g_1, \dots, g_m) deux familles génératrices.

Alors, F et G sont orthogonaux si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$, $\langle f_i, g_j \rangle = 0$.

Démonstration. On traite séparément les deux implications.

\Rightarrow Cette implication est claire.

\Leftarrow Soient $x \in F$ et $y \in G$. Comme les familles (f_1, \dots, f_n) et (g_1, \dots, g_m) sont respectivement génératrices de F et G , il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ et $y = \sum_{j=1}^m y_j g_j$. Par linéarité à gauche et linéarité à droite, on a alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \langle f_i, g_j \rangle = 0.$$

□

Exemple 7. Dans \mathbf{R}^3 muni de son produit scalaire usuel, les sous-espaces vectoriels $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $D = \text{Vect}((1, 1, 1))$ sont orthogonaux.

En effet, on remarque que la famille $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est une base de H et

$$\langle (1, -1, 0), (1, 1, 1) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle (1, 0, -1), (1, 1, 1) \rangle = 0.$$

Ainsi, H et D sont orthogonaux dans \mathbf{R}^3 .

Définition 7. *Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.*

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On définit F^\perp (lire « F orthogonal ») par

$$F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Proposition 9. *Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors, F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .*

Démonstration. Déjà F^\perp est non vide car il contient clairement le vecteur nul.

Soit u et v deux éléments de F^\perp , soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Par linéarité à droite, on a

$$\forall y \in F, \quad \langle y, u + \lambda v \rangle = \langle y, u \rangle + \lambda \langle y, v \rangle = 0$$

car u et v sont dans F^\perp . Ainsi, $u + \lambda v \in F^\perp$.

□

Exemple 8. Dans \mathbf{R}^4 muni de son produit scalaire usuel, on s'intéresse à l'orthogonal de $F = \text{Vect}((1, 2, 0, -1), (1, -1, 1, 0))$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F^\perp &\iff \begin{cases} \langle (x, y, z, t), (1, 2, 0, -1) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z, t), (1, -1, 1, 0) \rangle = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = x + 2y \\ z = -x + y \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = x(1, 0, -1, 1) + y(0, 1, -1, 2). \end{aligned}$$

On peut ainsi écrire que $F^\perp = \text{Vect}((1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 2))$.

2.2 Familles orthogonales et orthonormées

Définition 8. *Famille orthogonale.*

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille est **orthogonale** si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad (i \neq j) \implies (\langle u_i, u_j \rangle = 0).$$

Définition 9. *Famille orthonormée (ou orthonormale).*

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille est **orthonormée** si elle est orthogonale et si tous les vecteurs sont de norme 1, i.e. pour tout $i \in I$, $\|u_i\| = 1$.

Proposition 10. *Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.*

Démonstration. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Soit $J \subset I$ fini. Soit $(\lambda_i)_{i \in J} \in \mathbf{R}^J$ tel que $\sum_{i \in J} \lambda_i u_i = 0$. Soit $k \in J$. En utilisant la linéarité à gauche du produit scalaire, on a

$$0 = \langle 0, u_k \rangle = \left\langle \sum_{i \in J} \lambda_i u_i, u_k \right\rangle = \sum_{i \in J} \lambda_i \langle u_i, u_k \rangle.$$

Comme la famille est orthogonale, on a $0 = \lambda_k \|u_k\|^2$, puis comme $u_k \neq 0$, on a $\lambda_k = 0$. Ceci étant vrai pour tout $k \in J$, la famille $(u_i)_{i \in J}$ est libre, ainsi la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre. □

Définition 10. *Base orthonormée.*

On dit que \mathcal{B} est une **base orthonormée** de E si \mathcal{B} est une base et orthonormée.

Remarque 4. L'existence de base orthonormée n'est pas claire même lorsque E est un espace vectoriel euclidien. La prochaine sous-partie donne un procédé « naturel » pour construire des bases orthonormées dans le cas euclidien.

2.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 11. *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de vecteurs de E . Il existe une unique famille orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur p .

Lorsque $p = 1$. Soit (e_1) une famille libre. Comme $e_1 \neq 0$, on peut poser $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$.

Par construction, on a $\|\varepsilon_1\| = 1$, la famille (ε_1) est orthonormée.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. On suppose la propriété vraie au rang p , montrons qu'elle est vraie au rang $p + 1$. Soit $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ une famille libre de E . La sous-famille (e_1, \dots, e_p) est une famille libre de E , par hypothèse de récurrence, il existe une famille orthonormée de E , $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i).$$

On cherche ε_{p+1} sous la forme

$$\varepsilon_{p+1} = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_p \varepsilon_p + \lambda_{p+1} e_{p+1}.$$

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est orthonormée, donc

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_k \rangle = \lambda_k + \lambda_{p+1} \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle.$$

Ainsi, la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$ est orthonormée si, et seulement si,

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lambda_k = -\lambda_{p+1} \langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle$$

de sorte que si l'on pose

$$\varepsilon_{p+1} = \lambda_{p+1} (e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \dots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \varepsilon_p),$$

la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$ est orthogonale.

De plus, $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ est libre, donc $e_{p+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, donc $e_{p+1} \notin \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, donc $\|e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \dots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \varepsilon_p\| \neq 0$. Ainsi, en posant $\lambda_{p+1} = \frac{1}{\|e_{p+1} - \langle e_{p+1}, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \dots - \langle e_{p+1}, \varepsilon_p \rangle \varepsilon_p\|}$, la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$ est orthonormée.

De plus, par construction

$$\varepsilon_{p+1} = \underbrace{\lambda_{p+1}}_{\neq 0} e_{p+1} + \underbrace{\lambda_p e_p + \dots + \lambda_1 e_1}_{\in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)} .$$

Ainsi, on a bien $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$

□

Exemple 9. \mathbf{R}^3 est muni de son produit scalaire usuel. Soit $F = \text{Vect}((1, 2, 0), (1, 1, 3))$. On cherche une base orthonormée de F .

La famille $((1, 2, 0), (1, 1, 3))$ est une famille libre de F , on lui applique le procédé de Gram-Schmidt.

On pose $e_1 = \frac{1}{\|(1, 2, 0)\|} (1, 2, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 2, 0)$.

On cherche \tilde{e}_2 sous la forme $(1, 1, 3) + \alpha e_1$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On veut $\langle \tilde{e}_2, e_1 \rangle = 0$. Or, $\langle \tilde{e}_2, e_1 \rangle = \langle (1, 1, 3), e_1 \rangle + \alpha \langle e_1, e_1 \rangle = \langle (1, 1, 3), e_1 \rangle + \alpha$ car $\langle e_1, e_1 \rangle = \|e_1\|^2 = 1$. On a donc $\alpha = -\langle (1, 1, 3), e_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}} \langle (1, 1, 3), (1, 2, 0) \rangle = -\frac{3}{\sqrt{5}}$, ce qui donne $\tilde{e}_2 = (1, 1, 3) - \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 2, 0) = \frac{1}{5} (2, -1, 15)$.

On pose $e_2 = \frac{1}{\|\tilde{e}_2\|} \tilde{e}_2$. Comme $\|\tilde{e}_2\| = \frac{\sqrt{230}}{5}$, on en déduit finalement que $e_2 = \frac{1}{\sqrt{230}} (2, -1, 15)$.

Exemple 10. On munit $\mathbf{R}_2[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$. On cherche une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.

On pose $e_1 = \frac{1}{\|1\|} 1$. Comme $\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 1 dt} = \sqrt{2}$, on a $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On cherche \tilde{e}_2 de la forme $\tilde{e}_2 = X + \alpha e_1$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On veut $\langle e_1, \tilde{e}_2 \rangle = 0$. Or, $\langle e_1, \tilde{e}_2 \rangle = \langle e_1, X + \alpha e_1 \rangle = \langle e_1, X \rangle + \alpha$ car $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$. On prend $\alpha = -\langle e_1, X \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^1 t dt = 0$

On pose finalement $e_2 = \frac{1}{\|\tilde{e}_2\|} \tilde{e}_2$. Or,

$$\|\tilde{e}_2\| = \sqrt{\langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^1 t^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

On a donc $e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} X$.

On cherche $\tilde{e}_3 = X^2 + \alpha e_2 + \beta e_1$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. On veut $\langle \tilde{e}_3, e_1 \rangle = \langle \tilde{e}_3, e_2 \rangle = 0$. Or, $\langle \tilde{e}_3, e_1 \rangle = \left\langle X^2, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle + \beta$ et $\langle \tilde{e}_3, e_2 \rangle = \left\langle X^2, \sqrt{\frac{3}{2}} X \right\rangle + \alpha$. Il s'ensuit que l'on a $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, soit $\tilde{e}_3 = X^2 - \frac{1}{3}$.

On pose finalement $e_3 = \frac{1}{\|\tilde{e}_3\|} \tilde{e}_3$. Or,

$$\|\tilde{e}_3\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$$

Ainsi, $e_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} (3X^2 - 1)$.

Corollaire 1. *Existence de bases orthonormées dans le cas euclidien.*

Tout espace vectoriel euclidien admet des bases orthonormées.

Démonstration. Soit (f_1, \dots, f_n) une base de E . On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille libre.

On note (e_1, \dots, e_n) la famille obtenue. Par construction, elle est orthonormale, donc libre. De plus,

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n) = E,$$

donc (e_1, \dots, e_n) est génératrice : c'est une base orthonormée de E . □

Proposition 12. *Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.*

Soit E un espace euclidien dont on note (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée. Pour tout $\left(x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i\right)$, on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Remarque 5. Cette proposition assure que dans une base orthonormée le calcul du produit scalaire et de la norme se fait comme dans \mathbf{R}^n muni de son produit scalaire usuel.

Démonstration. Avec les mêmes notations, on a

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle.$$

Or, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1$, donc

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La relation $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ s'en déduit de la précédente en prenant $y = x$. □

3 Projection orthogonale

3.1 Projection sur un sous-espace vectoriel

Proposition 13. *Si E est un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E , alors $F \oplus F^\perp = E$. En particulier, $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.*

Démonstration. On procède par analyse/synthèse.

Analyse. Soit $x \in E$. On suppose qu'il existe $y \in F$ et $z \in F^\perp$ tel que $x = y + z$. Soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F . On écrit alors $y = \sum_{i=1}^p y_i e_i$. Comme $z \in F^\perp$, on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p y_i e_i + z \right\rangle = \sum_{i=1}^p y_i \langle e_i, e_k \rangle + \langle z, e_k \rangle = y_k.$$

On en déduit que $y = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$ et $z = x - y = x - \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$.

Synthèse. Si l'on reprend y et z trouvés ci-dessus, il est clair que $y + z = x$. Il est aussi clair que $y \in F$ comme combinaison linéaire d'éléments de F . Vérifions que $z \in F^\perp$.

D'après la proposition 8, il suffit de vérifier que $\langle z, e_j \rangle = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. En utilisant la On a

$$\begin{aligned} \langle z, e_j \rangle &= \left\langle x - \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i, z \right\rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.

Ainsi, $z \in F^\perp$. □

△ L'hypothèse de dimension finie est important : si E n'est plus de dimension finie, on a encore $F \cap F^\perp = \{0\}$, mais on a pas, en général, $E = F + F^\perp$.

Définition 11. *Projection orthogonale.*

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E . La **projection orthogonale** sur F est la projection p_F sur F parallèlement à F^\perp .

Remarque 6. Si l'on note p_F la projection orthogonale sur F et p_{F^\perp} celle sur F^\perp , on a $p_F + p_{F^\perp} = \text{id}_E$.

Proposition 14. *Formule de projection.*

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E . Soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F . Alors,

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Démonstration. On pose g l'endomorphisme de E défini par $g(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$. Pour montrer que $g = p_F$, il suffit de montrer que g et p_F coïncident sur des espaces en somme directe. D'après la proposition 13, on a $F \oplus F^\perp = E$.

- Pour tout $x \in F^\perp$, on a $p_F(x) = 0$ par définition de p_F et $g(x) = 0$ car pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle x, e_i \rangle = 0$.
- Pour tout $x \in F$, on a $p_F(x) = x$ et, si l'on écrit $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$, on a

$$g(x) = \sum_{i=1}^p \left\langle \sum_{j=1}^p x_j e_j, e_i \right\rangle e_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p x_j \langle e_j, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^p x_i e_i = x$$

car pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. □

Exemple 11. On munit \mathbf{R}^3 de son produit scalaire usuel. Déterminons une expression explicite pour la projection orthogonale sur $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - 2y + z = 0\}$.

On commence par trouver une base de F . On remarque que les vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ appartiennent à F et sont non colinéaires. De plus, F est un hyperplan de \mathbf{R}^3 , donc de dimension 2, donc $F = \text{Vect}((2, 1, 0), (1, 0, -1))$.

Comme F est de dimension 2 et F^\perp de dimension 1, il semble plus simple d'obtenir une formule pour la projection sur F^\perp . Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F^\perp &\iff \begin{cases} \langle (x, y, z), (2, 1, 0) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z), (2, 1, 0) \rangle = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = x(1, -2, 1). \end{aligned}$$

Ainsi, $F^\perp = \text{Vect}((1, -2, 1))$. Il est alors facile de trouver une base orthonormée de F^\perp : $\frac{1}{\|(1, -2, 1)\|}(1, -2, 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. Ainsi,

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad p_{F^\perp}(x, y, z) = \left\langle (x, y, z), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) = \frac{1}{6}(x - 2y + z)(1, -2, 1).$$

Il s'ensuit que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad p_F(x, y, z) = (x, y, z) - p_{F^\perp}(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{1}{6}(x - 2y + z)(1, -2, 1).$$

3.2 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 12. *Distance à un sous-espace vectoriel.*

La distance d'un vecteur $x \in E$ à un sous-espace vectoriel F de E est la quantité

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Proposition 15. *Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.*

Soit $x \in E$ et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors, en notant respectivement p_F et p_{F^\perp} les projections orthogonales sur respectivement F et F^\perp , on a

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Déjà, on remarque que $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2.$$

Comme $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) - y \in F$, le théorème de Pythagore donne

$$\forall y \in F, \quad \|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

avec égalité, si et seulement si, $y = p_F(x)$.

On en déduit que l'infimum $\inf_{y \in F} \|x - y\|$ est atteint et il est atteint si, et seulement si, $y = p_F(x)$. □

Exemple 12. \mathbf{R}^3 est muni de son produit scalaire usuel. Déterminons la distance de $(1, 0, 0)$ au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}$.

Il est clair que la famille F est de dimension 2 et que $F = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$. On commence par donner grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt une base orthonormée de F .

On pose $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. On cherche \tilde{e}_2 sous la forme $(1, 0, -1) + \alpha e_1$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On veut $\langle \tilde{e}_2, e_1 \rangle = 0$.

Or, $\langle \tilde{e}_2, e_1 \rangle = \left\langle (1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \right\rangle + \alpha \text{ car } \langle e_1, e_1 \rangle = \|e_1\|^2 = 1$. Ainsi, $\alpha = -\left\langle (1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il s'ensuit que $\tilde{e}_2 = (1, 0, -1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$.

On pose $e_2 = \frac{1}{\|e_2\|} \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2)$.

En utilisant les propositions 15 et 14, on a

$$\begin{aligned} d((1, 0, 0), F) &= \|(1, 0, 0) - p_F(1, 0, 0)\| \\ &= \left\| (1, 0, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (1, -1, 0), (1, 0, 0) \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0) - \frac{1}{\sqrt{6}} \langle (1, 1, -2), (1, 0, 0) \rangle \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Le lecteur attentif remarquera que nous nous sommes compliqué la vie ! Il suffisait de déterminer une base orthonormée de F^\perp , ce qui est simple car $\dim(F^\perp) = 1$. En fait, c'était l'occasion d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt une nouvelle fois !

4 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent servir aux concours.

4.1 Matrice et déterminant de Gram

Dans cette sous-partie, E est un espace préhilbertien réel dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire.

Définition 13. *Matrice de Gram.*

Soit x_1, \dots, x_n une famille de vecteurs de E . On appelle **matrice de Gram** associée aux vecteurs x_1, \dots, x_n , notée $G(x_1, \dots, x_n)$, la matrice

$$G(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Remarque 7. Par symétrie du produit scalaire, la matrice $G(x_1, \dots, x_n)$ est symétrique.

Définition 14. *Déterminant de Gram.*

Soit x_1, \dots, x_n une famille de vecteurs de E . Le **déterminant de Gram** de la famille x_1, \dots, x_n est le déterminant de la matrice de Gram $G(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 16. Soit x_1, \dots, x_n une famille de vecteurs de E .

$\det(G(x_1, \dots, x_n)) \neq 0$ si, et seulement si, la famille (x_1, \dots, x_n) est libre.

Démonstration. On prouve séparément les deux implications.

\Rightarrow Supposons la famille liée. Quitte à permuter l'ordre de la famille (ce qui multiplie le déterminant par -1), on peut supposer que x_1 est combinaison linéaire de x_2, \dots, x_n : il existe $(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel

$$\text{que } x_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i.$$

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i C_i$ montre que $\det(G(x_1, \dots, x_n)) = \det(G(0, x_2, \dots, x_n)) = 0$, ce qui est exclu.

\Leftarrow On suppose que $\det(G(x_1, \dots, x_n)) = 0$. L'une des colonnes de $G(x_1, \dots, x_n)$ est donc combinaison linéaire des autres. Quitte à permuter les colonnes (ce qui ne modifie pas le déterminant car nul), on peut supposer que la première colonne est combinaison linéaire des autres : il existe $(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$

$$\text{tel que } C_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i C_i.$$

En particulier, on a

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle x_j, x_1 \rangle = \sum_{i=2}^n \alpha_i \langle x_j, x_i \rangle,$$

soit

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left\langle x_j, x_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i \right\rangle = 0.$$

Comme la famille (x_1, \dots, x_n) est une famille génératrice de l'espace vectoriel qu'elle engendre, on a donc

$$\forall x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n), \quad \left\langle x, x_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i \right\rangle = 0.$$

En prenant $x = x_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i$, on obtient $\left\| x_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i \right\| = 0$, soit $x_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i$, ce qui est impossible car la famille (x_1, \dots, x_n) est supposée libre. □

Proposition 17. *Calcul de la distance à l'aide du déterminant de Gram.*

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension n dont (x_1, \dots, x_n) est une base. Soit $x \in E$. On alors

$$\det(G(x, x_1, \dots, x_n)) = \|x - p_F(x)\|^2 \det(G(x_1, \dots, x_n)) = d(x, F)^2 \det(G(x_1, \dots, x_n)).$$

Démonstration. On écrit $x = x - p_F(x) + p_F(x)$. Par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$\det(G(x, x_1, \dots, x_n)) = \det(G(x - p_F(x), x_1, \dots, x_n)) + \det(G(p_F(x), x_1, \dots, x_n)).$$

La famille $(p_F(x), x_1, \dots, x_n)$ est liée car elle contient $n + 1$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n , par la proposition 16, on a $\det(G(p_F(x), x_1, \dots, x_n)) = 0$. Or,

$$\det(G(x - p_F(x), x_1, \dots, x_n)) = \begin{vmatrix} \langle x - p_F(x), x - p_F(x) \rangle & \langle x - p_F(x), x_1 \rangle & \cdots & \langle x - p_F(x), x_n \rangle \\ \langle x_1, x - p_F(x) \rangle & \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x - p_F(x) \rangle & \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}.$$

Comme $x - p_F(x) \in F^\perp$, on a $\langle x_i, x - p_F(x) \rangle = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ainsi

$$\det(G(x - p_F(x), x_1, \dots, x_n)) = \begin{vmatrix} \langle x - p_F(x), x - p_F(x) \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve finalement

$$\det(G(x, x_1, \dots, x_n)) = \det(G(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)) = \|x - p_F(x)\|^2 \det(G(x_1, \dots, x_n)).$$
□

4.2 Polynômes d'Hermite

On se place dans $\mathbf{R}[X]$ que l'on munit du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2/2} dt.$$

La présence de la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ peut sembler obscure, c'est une convention.

Définition 15. *Polynômes d'Hermite.*

La famille $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une famille libre de $\mathbf{R}[X]$. En lui appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on récupère une famille $(\widetilde{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ orthonormée de $\mathbf{R}[X]$. On construit alors la suite $(H_k)_{k \in \mathbf{N}}$ avec pour tout $k \in \mathbf{N}$, H_k proportionnel à \widetilde{H}_k et unitaire. On a en particulier,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \text{Vect}(H_0, \dots, H_n) = \text{Vect}(\widetilde{H}_0, \dots, \widetilde{H}_n) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) = \mathbf{R}_n[X].$$

Remarque 8. La définition assure donc que H_n est de degré n et la suite $(H_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est unique.

Proposition 18. *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, H_n est scindé sur \mathbf{R} et est à racines simples.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que H_n a r racines, avec $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, en lesquelles H_n change de signe.

Soit $P = \prod_{i=1}^r (X - x_i) \in \mathbf{R}_r[X] \subset \mathbf{R}_{n-1}[X]$. Par construction, H_n est orthogonal à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, en particulier, $\langle H_n, P \rangle = 0$.

Mais, la fonction $t \mapsto H_n(t)P(t)$ est, par définition de P , de signe constant et non nulle. Ainsi,

$$\langle H_n, P \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)P(t)e^{-t^2/2} dt \neq 0,$$

ce qui est exclu. □

Proposition 19. *Formule de Rodrigues.*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}).$$

Démonstration. Soit $Q_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2})$.

Il est facile de constater que Q_n est un polynôme unitaire de degré n . Soit $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ avec, par exemple, $n < m$. Montrons que $\langle Q_n, Q_m \rangle = 0$. Il suffit de prouver que $\langle X^n, Q_m \rangle = 0$ pour $n < m$. Or,

$$\langle X^n, Q_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} (e^{-t^2/2}) dt.$$

Après n intégrations par parties, on a

$$\langle X^n, Q_m \rangle = (-1)^{m-n} n! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}} (e^{-t^2/2}) dt = 0.$$

On en déduit que la famille $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille de polynômes unitaires avec $\deg(Q_n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Par unicité de la famille, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_n = Q_n$. □

Proposition 20. *Relation de récurrence.*

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$H_{n+1} - XH_n + nH_{n-1} = 0.$$

Démonstration. D'après la proposition 19, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, \quad H_{n+1} &= (-1)^{n+1} e^{x^2/2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2/2}) \\ &= (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (xe^{-x^2/2}) \\ &= (-1)^n e^{x^2/2} \left(x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}) + n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2/2}) \right) \\ &= xH_n(x) - nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

□

Proposition 21. *Équation différentielle vérifiée par H_n .*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$H_n'' - XH_n' + nH_n = 0.$$

Démonstration. En dérivant la relation obtenue à la proposition 19, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad H_n'(x) = xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

En comparant cette égalité avec celle obtenue à la proposition 20, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad H_n'(x) = nH_{n-1}(x). \quad (1)$$

En dérivant la relation de récurrence obtenue à la proposition 20 et en utilisant (1), on obtient la relation souhaitée.

□