Chapitre 9 : Exercices

Exercice 1.

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et on définit φ sur E^2 par

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \varphi(f,g) = f(0)\,g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer les produits scalaires $\varphi(\sin, \cos)$ et $\varphi(\exp, \mathrm{id}_E)$.
3. Calculer les normes $\|\sin\|$, $\|\cos\|$ et $\|\exp\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire φ.
4. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.

Exercice 2.

On pose $E = \mathbf{R}_2[X]$. Soit φ définie sur E^2 par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)\,Q(k).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\varphi\left(X^2+1, X^2+X+1\right)$ et $\varphi\left(2X-1, X^2+X+1\right)$.
3. Calculer $\left\|X^2+1\right\|$ et $\|2X+1\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire φ.

Exercice 3.

Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.
Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leq 14$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 4.

Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $2x^2+y^2+5z^2 \leq 1$.
Montrer que $(x+y+z)^2 \leq 17/10$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5.

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.
Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 6.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \quad I_{n+m}^2 \leq I_{2n} I_{2m}.$$

Exercice 7.

Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad 2 + \|x+y\|^2 \leq 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right).$$

Exercice 8.

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(u,v) \in E^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \|u+tv\| \geq \|u\|.$$

Montrer que u et v sont orthogonaux.

Exercice 9.

Soit $\mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. Déterminer l'orthogonal des sous-espaces vectoriels définis par :

$$F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0,-1),(1,0,2,-1)\right) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\left((1,2,3,4),(5,6,7,8)\right).$$

Exercice 10.

On reprend les notations de l'exercice 2. On note

$$F = \left\{P \in \mathbf{R}_2[X],\ P(0)=0\right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{P \in \mathbf{R}_2[X],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base de F et une base de G.
3. Déterminer l'orthogonal de F et celui de G.
4. Montrer que la famille $\left(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\right)$ est une base orthogonale de E. En déduire une base orthonormée de E.

Exercice 11.

On définit φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$ par :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad \varphi(A,B) = \mathrm{Tr}\left(A^\top B\right).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{Tr}(A)^2 \leq n\mathrm{Tr}\left(A^\top A\right)$. Préciser les cas d'égalité.
3. Montrer que $F = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Préciser sa dimension.
4. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 12.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel préhilbertien E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Montrer qu'il y a égalité lorsque E est euclidien.
3. Montrer que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$. Montrer qu'il y a égalité lorsque E est euclidien.

Exercice 13.

Déterminer une base orthonormée des sous-espaces vectoriels F et G définis à l'exercice 9.

Exercice 14.

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Exercice 15.

On munit $\mathbf{R}^3$ de son produit scalaire usuel.

1. Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale p sur le plan P d'équation $x-2y+z=0$.
2. Calculer la distance de $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ au plan P.

Exercice 16.

On munit $\mathbf{R}^4$ de son produit scalaire usuel.

1. Déterminer une expression de la projection orthogonale p de $\mathbf{R}^4$ sur le sous-espace vectoriel F d'équations
$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x-y+z-t &= 0 \end{cases}.$$
2. Calculer la distance de $(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 17.

On reprend les notations de l'exercice 2.

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de $aX^2+bX+c\in\mathbf{R}_2[X]$ sur $\mathbf{R}_1[X]$.
3. Calculer la distance de X^2 à $\mathbf{R}_1[X]$.

Exercice 18.

On reprend les notations de l'exercice 14.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $X^2\in\mathbf{R}_2[X]$ sur $\mathbf{R}_1[X]$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2}\int_0^1\left(t^2-(at+b)\right)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 19.

Soient $E=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ et $F=\left\{f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})\ \text{ et } f(0)=0\right\}$. Soit l'application φ définie sur $E\times E$ par
$$\forall(f,g)\in E^2,\quad \varphi(f,g)=\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
3. En déduire que
$$\forall(f,g)\in E^2,\quad \int_0^1|f(t)\,g(t)|\,\mathrm{d}t\leq\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$
4. Soit $f\in F$.
   (a) Justifier que
   $$\forall x\in[0,1],\quad f(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que
   $$\forall x\in[0,1],\quad |f(x)|\leq\int_0^1\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t,$$
   puis que
   $$\int_0^1\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\geq\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

5. Soit $f \in F$. En utilisant le résultat de la question 4 (b) avec f^2 et en utilisant le résultat de la question 3, montrer que
$$\sqrt{\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t} \geq \frac{1}{2}\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Exercice 20.

Soit E un espace euclidien dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : pour tout $x \in E$, $f(x)$ est orthogonal à x.

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)^{\perp}$.
3. (a) Montrer que 0 est la seule valeur réelle possible pour f.
   (b) f est-il diagonalisable ?
4. Soit $\mathscr{B}$ une base obtenue en concaténant une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E et déterminer la forme de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 21.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. E est un espace vectoriel de dimension n.

1. On considère, dans cette question seulement, $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est un hyperplan de $\mathbf{R}^3$ stable par f.
2. On considère, dans cette question seulement, $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de f.
   (b) Montrer que $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$ est un hyperplan de $\mathbf{R}^3$ stable par f.

   Dans la suite de l'exercice, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n dont on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée.
   On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E et la norme associée est notée $\|\cdot\|$.
   Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ ayant au moins une valeur propre réelle λ. On se propose de montrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f.
3. On note $f^{\star}$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (a) Vérifier que
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{\star}(y) \rangle.$$
   (b) Établir que $f^{\star}$ est l'unique endomorphisme de E vérifiant
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{\star}(y) \rangle.$$
4. (a) Montrer que λ est valeur propre de $f^{\star}$.
   (b) Soit u un vecteur propre de $f^{\star}$ pour la valeur propre λ.
   Montrer que $\operatorname{Vect}(u)^{\perp}$ est un hyperplan de E stable par f.