Chapitre 11 : Exercices

Exercice 1.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction régularisée, 2π-périodique, impaire définie par :

$$\forall x \in \left]0, \pi\right[, \quad f(x) = 1.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeur des sommes
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
3. En déduire la valeur des sommes
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique, paire définie par

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = x.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeur des sommes
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$
3. En déduire la valeur des sommes
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 3.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire définie par

$$\forall x \in \left]0, \pi\right], \quad f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. En déduire, pour $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = |\cos(x)|$.

1. Montrer que f est π-périodique.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Exercice 5.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}^\star$ et soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in \left]-\pi, \pi\right], \quad f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\alpha^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}.$$

Exercice 6.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$. Soit la fonction f la fonction 2π-périodique définine par

$$\forall x \in \left]-\pi, \pi\right], \quad f(x) = \cos(\alpha x).$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\alpha^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}.$$

3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}\backslash\pi\mathbf{Z}, \quad \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-(n\pi)^2}.$$

Exercice 7.

Soit $\alpha \in \left]0, \pi\right[$. Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in \left[-\pi, \pi\right[, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha n)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha n)}{n^2}.$$

Exercice 8.

Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |\sin(x)| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}.$$

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Montrer que f est 1-périodique.
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}, \quad f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2\pi n x)}{n}.$$

Exercice 10.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Exprimer $a_n(f')$ et $b_n(f')$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour $n \in \mathbf{N}^\star$.
2. En déduire que
$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$
3. Traiter les cas d'égalité.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux et T-périodique.

1. Montrer que les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbf{N}^\star}$ convergent vers 0.
2. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^k$, alors
$$a_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad b_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$