Un résultat élémentaire sur le rang de matrices

Erik Thomas *

Résumé

Dans cette note, on donne une majoration de la dimension d'un sous-espace vectoriel F en fonction de $k := \max\{\mathrm{rg}(A),\ A \in F\}$. Cette majoration permet de retrouver un résultat classique : tout hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ contient une matrice inversible.

1 Introduction

Le but de cette note est d'énoncer un résultat méconnu, à notre connaissance, sur le rang. Dans toute cette note, $\mathbf{K}$ est un corps infini et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Proposition 1.1. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$. On pose $k := \max\{\mathrm{rg}(A),\ A \in F\}$. Alors, $\dim(F) \leq 2nk - k^2$.*

On retrouve alors le très classique résultat suivant.

Corollaire 1.1. *Soit H un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$. Alors, H contient au moins une matrice inversible.*

2 Preuves

On prouve la proposition 1.1.

Démonstration. La preuve se base sur le pivot de Gauss. On garde les notations de la proposition 1.1.

- Soit A_1 une matrice de F de rang k. Il existe donc deux matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telles que $A_1 = P \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$. Ainsi, quitte à composer par l'isomorphisme $M \mapsto P^{-1} M Q^{-1}$ qui préserve le rang, on peut supposer que $A_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Soit $A_2 = \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ Z_2 & T_2 \end{pmatrix}$ (les blocs sont de la même taille que ceux de la matrice A_1). Montrons que $T_2 = 0$. Supposons que $T_2 \neq 0$: T_2 contient donc un élément non nul. Quitte à faire des opérations sur les $n-k+1$-ièmes dernières lignes et/ou colonnes (donc de composer par une application du type $M \mapsto PMQ$ avec P et Q deux matrices inversibles), on peut supposer que A_2 est de la forme $\begin{pmatrix} X_2' & Y_2' \\ Z_2' & T_2' \end{pmatrix}$ avec la première colonne (resp. la première ligne) de Y_2' (resp. Z_2') ne contenant que des zéros et $t_{1,1}' = 1$. On note que ces opérations ne modifient pas la matrice A_1.
  Comme F est un espace vectoriel, la matrice $A_2 + tA_1 \in F$ pour tout $t \in \mathbf{K}$. Or, la matrice extraite $(A_2 + tA_1)_{(i,j) \in [\![1,k+1]\!]^2}$ est la matrice (par blocs) $\begin{pmatrix} X_2' + t\mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est $\chi_{-X_2'}(t)$ (on prend la convention que la polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est $\det(X\mathrm{I}_n - A)$). Comme $\mathbf{K}$ est infini, il existe une valeur de $t_0 \in \mathbf{K}$ pour laquelle $\det \begin{pmatrix} X_2' + t_0\mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. On en déduit que la matrice $A_2 + t_0 A_1 \in F$ est de rang au moins $k+1$, ce qui contredit la définition de k.

*erik.thomas@ens-rennes.fr

- Si l'on note r la dimension de F, on construit ainsi une base $(A_1, \dots, A_r)$ de F avec pour tour $i \in [\![1, r]\!]$, $A_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ avec $\mathscr{G} = \left\{E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \setminus [\![k+1,n]\!]^2\ \right\}$. Il s'ensuit que

$$\dim(F) \leq \dim\left(\mathrm{Vect}(\mathscr{G})\right) = n^2 - (n-k)^2 = 2kn - k^2.$$

$\square$

On prouve le corollaire 1.1.

Démonstration. Soit $k := \max\left\{\mathrm{rg}(A),\ A \in H\right\}$. Notons que $k = n-1$ ou n. En effet, si $k \leq n-2$, d'après la proposition 1.1, on aurait

$$n^2 - 1 = \dim(H) \leq 2nk - k^2 = n^2 - (n-k)^2 \leq n^2 - 4.$$

Il reste à prouver que $k = n$. On suppose que $k = n-1$. La preuve de la proposition 1.1 montre qu'il existe un isomorphisme φ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ respectant le rang des matrices (i.e. $\mathrm{rg}(\varphi(A)) = \mathrm{rg}(A)$ pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$) tel que $\varphi(H) = F$ avec $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et $\mathscr{F} = \left\{E_{i,j},\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i,j) \neq (n,n)\right\}$. Or, on remarque que F contient une matrice inversible, donc H en contient aussi une, ce qui contredit la définition de k. Ainsi, $k = n$, puis H contient une matrice inversible.

$\square$

Références

[1] M. Cognet, *Algèbre linéaire*, Bréal, 2000.