Une équivalence à la convexité

Erik Thomas *

Résumé

Le but de cette note, nous introduisons la notion de « presque-convexité ». Cette notion permet de caractériser les fermés convexes d'un espace préhilbertien réel.

1 Introduction

Avant d'énoncer les résultats principaux de cette note, nous faisons quelques rappels sur la notion de longueur d'un arc paramétré.

Définition 1.1. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé. Soient a et b deux points de E et soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On définit la longueur de γ, notée $\mathscr{L}(\gamma)$, par :*

$$\mathscr{L}(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|_E \,,\ n \in \mathbf{N}^\star \text{ et } 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1 \right\} \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\} \,.$$

On admettra le lemme suivant dont la preuve découle immédiatement de la définition 1.1 et de l'inégalité triangulaire.

Lemme 1.1. *Soient a et b deux points d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$. Pour toute application $\gamma : [0,1] \to E$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a $\mathscr{L}(\gamma) \geq \|a - b\|_E$.*

La définition suivante introduit la notion de « presque-convexité », essentielle pour notre propos.

Définition 1.2. *Soit A une partie connexe par arcs d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$. On dit que A est presque-convexe si pour tout $(a, b) \in A^2$,*

$$\inf \{\mathscr{L}(\gamma),\ \gamma : [0,1] \to A \text{ continue tel que } \gamma(0) = a \text{ et } \gamma(1) = b\} = \|a - b\|_E \,.$$

La notion de presque convexité généralise la notion de convexité : une partie convexe est évidemment presque-convexe. Elle a l'avantage d'être une notion métrique et non une notion affine.

Voici notre résultat principal.

Proposition 1.1. *Soit F une partie non vide fermée, connexe par arcs d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. F est convexe si, et seulement si, F est presque-convexe.*

Remarque 1. L'équivalence est fausse si F est ouvert. Il suffit de prendre $F := B(0,1) \setminus \{(0,0)\}$.

Dans le cas des ouverts, on peut néanmoins énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Soit O un ouvert de $\mathbf{R}^2$. O est convexe si, et seulement si, O est presque-convexe et simplement connexe.*

Pour la notion de simple connexité et pour une introduction à la topologie algébrique, nous renvoyons à [1].

* erik.thomas@ens-rennes.fr

2 Preuves

On prouve la proposition 1.1.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Cette implication est claire.

($\Leftarrow$) Soient a et b deux points différents de F. On suppose qu'il existe $t \in]0,1[$ tel que $x_t := (1-t)a + tb \notin F$. Quitte à translater (les translations sont des homéomorphismes, donc l'image de F par une translation reste un fermé), on peut supposer que $x_t = 0$. Comme F est fermé, $E \setminus F$ est ouvert : il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset E \setminus F$.

Soit γ un chemin continue à valeurs dans F qui relie les points a et b. Soit $H := (a-b)^{\perp}$, H est donc fermé. Comme H est fermé, $E \setminus H$ a deux composantes connexes par arcs : H_- et H_+. On a, par exemple, $a \in H_-$ et $b \in H_+$.

Le théorème des valeurs intermédiaires assure que γ rencontre H en un point x_0. Comme γ ne rencontre pas $B(0,r)$, on a $\|x_0\| \geq r$. En utilisant le lemme 1.1, on a :

$$\mathscr{L}(\gamma) \geq \|a - x_0\| + \|b - x_0\|.$$

Or, le théorème de Pythagore assure que

$$\|a - x_0\|^2 = \|a\|^2 + \|x_0\|^2 \quad \text{et} \quad \|b - x_0\|^2 = \|b\|^2 + \|x_0\|^2.$$

On en déduit que

$$\mathscr{L}(\gamma) \geq \sqrt{\|a\|^2 + r^2} + \sqrt{\|b\|^2 + r^2}.$$

En utilisant le fait que F est presque-convexe, on en déduit l'inégalité $\|a - b\| \geq \sqrt{\|a\|^2 + r^2} + \sqrt{\|b\|^2 + r^2}$. Comme a, b et 0 sont colinéaires avec $0 \in [a,b]$, on a $\|a - b\| = \|a\| + \|b\|$, d'où l'inégalité

$$\|a\| + \|b\| \geq \sqrt{\|a\|^2 + r^2} + \sqrt{\|b\|^2 + r^2}.$$

D'où une contradiction.

□

On prouve la proposition 1.2.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Cette implication est claire.

($\Leftarrow$) Soient A et B deux points de O avec $A \neq B$. On suppose qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $x_{t_0} := (1-t)a + tb \notin O$. On se place dans le repère affine $\mathscr{R} := (x_{t_0}; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ et $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$. Dans ce repère, les coordonnées des points A et B sont respectivement $(x_A, 0)$ et $(x_B, 0)$ avec, par exemple, $x_A < 0$ et $x_B > 0$.

Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset O$ et $B(B, \varepsilon) \subset O$. Soient les points C et D de coordonnées respectives $(x_A, \frac{\varepsilon}{2})$ et $(x_B, \frac{\varepsilon}{2})$. En utilisant le fait que O est presque-convexe, il existe un chemin continue $\delta : [0,1] \to O$ tel que $\delta(0) = C$ et $\delta(1) = D$ avec $CD \leq \mathscr{L}(\delta) \leq CD + \alpha$ pour tout $\alpha > 0$. En choissisant α assez petit, il existe un tel chamin δ_1 tel que l'ordonnée de $\delta_1(t)$ est strictement positive pour tout $t \in [0,1]$. Soit enfin γ_1 défini par

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma_1(t) := \begin{cases} (1-4t)A + 4tC & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \delta_1\left(2t - \frac{1}{2}\right) & \text{si } t \in \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \\ (4-4t)D + (4t-3)B & \text{si } t \in \left]\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}.$$

Il est clair que γ_1 ainsi défini est continue et vérifie $\gamma_1(0) = A$, $\gamma_1(1) = B$ et est à valeurs dans O. De plus, pour tout $t \in]0,1[$, l'ordonnée de $\gamma(t)$ est strictement positive.

On construit de même une application $\gamma_2 : [0,1] \to O$ continue telle que $\gamma_2(0) = A$, $\gamma_2(1) = B$ et tel que pour tout $t \in]0,1[$, l'ordonnée de $\gamma_2(t)$ est strictement négative.

Soit enfin le lacet γ défini sur $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2-2t) & \text{si } t \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Il est clair que γ est continue, que $\gamma(0) = \gamma(1) = A$. On note que γ n'est pas contratile dans O à cause de x_{t_0}. Cela contredit le fait que O ait été supposé simplement connexe.

$\square$

Remarque 2. Il est crucial de se placer dans $\mathbf{R}^2$. le résultat est faux dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ avec $n \geq 3$.

Références

[1] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2009.