Chapitre 13 : Exercices

Exercice 1.

Soient $a, b > 0$. Soit f l'application f définie sur $\mathbf{R}_+^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^2, \quad f(x,y) = \frac{x^a y^b}{x^2+y^2}.$$

Pour quelles valeurs de (a,b), f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 2.

On définit la fonction f sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 3.

On définit la fonction f sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

Exercice 4.

On définit la fonction f sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2-y^2\right) \ln\left(x^2+y^2\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 5.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Indication : On pourra procéder au changement de variable $(u,v) = (2x+y, 3x+y)$.

Exercice 6.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

Indication : On pourra procéder au changement de variable $(u, v) = (x + y, 2x + 3y)$.

Exercice 7.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Indication : On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 8.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Indication : On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 9.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Indication : On pourra procéder au changement de variable $(u, v) = (x + y, x - y)$.

Exercice 10.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par

$$F(t) = f(x + t, y + t) - f(x, y).$$

2. Montrer que la fonction f vérifie la relation

$$\forall (x, y, t) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x + t, y + t) = f(x, y)$$

si, et seulement si, f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exercice 11.

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = y\mathrm{e}^{xy} + 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = x\mathrm{e}^{xy} \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = \mathrm{e}^{x}y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = \mathrm{e}^{x} + 2y \end{cases}$;

3. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = \sin(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = \cos(xy) \end{cases}$;

4. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = \mathrm{e}^{x} + y\cos(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = x\cos(xy) \end{cases}$.

Exercice 12.

Déterminer les extrema de la fonction $f : T \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = xy(1-x-y)$ avec $T = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\right\}$.

Exercice 13.

Déterminer les extremums de la fonction $f : [0,\pi/2]^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$.

Exercice 14.

Déterminer les extremums de la fonction $f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$.

Exercice 15.

Déterminer les extremums de la fonction $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ avec $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

Exercice 16.

Déterminer les extremums de la fonction $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = y^2 - x^2 y + x^2$ avec $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\right\}$.

Exercice 17.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1. Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathscr{C}$?