Chapitre 14 : Exercices

Exercice 1.

Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y' + t = t\mathrm{e}^{-t}$;
2. $y' + 2y = t^2 - 2t + 3$;
3. $y' - 2y = \cos(t) + \sin(t)$;
4. $\left(t^2+1\right) y' - ty = \left(t^2+1\right)^{3/2}$.

Exercice 2.

Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $ty' - 2y = t^3$;
2. $t^2 y' - y = 0$;
3. $ty' + y = 1$;
4. $t(t-1)y' - ty = 1$.

Exercice 3.

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.

Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentilles suivantes.

1. $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^t$;
2. $y'' + 9y = 3\mathrm{e}^{-t}$;
3. $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^t$;
4. $y'' + 2y' + 2y = \sin(t)$;
5. $y'' - 3y' + 2y = \sin(2t)$;
6. $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^t \cos(t)$.

Exercice 5.

On considère l'équation différentielle suivante

$$\left(1+\mathrm{e}^t\right) y'' + 2\mathrm{e}^t y' + \left(2\mathrm{e}^t + 1\right) y = \mathrm{e}^t. \tag{1}$$

1. Soit y solution de (1). Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 portant sur $z(t) = \left(1+\mathrm{e}^t\right) y(t)$.
2. Terminer la résolution de (1) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 6.

On considère sur $I = \left]0, +\infty\right[$ l'équation différentielle suivante

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0. \tag{2}$$

1. Soit y solution de (2). Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 portant sur $z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$.
2. Terminer la résolution de (2) sur I.

Exercice 7.

Soit $a > 0$. On considère sur $I = \left]0, +\infty\right[$ l'équation différentielle suivante

$$t^2 y'' + ty' - a^2 y = 0. \tag{3}$$

1. Déterminer les solutions de (3) de la forme $t \longmapsto t^p$ avec $p \in \mathbf{R}$.
2. Terminer la résolution de (3) sur I.

Exercice 8.

On considère sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$(1+t)^2\, y'' - 2\,(1+t)\, y' + 2y = 0. \tag{4}$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (4).
2. En déduire les solutions de (4) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
3. Terminer la résolution de (4) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 9.

On considère sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$\left(1+t^2\right) y'' - 2y = 0. \tag{5}$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (5).
2. Terminer la résolution de (5) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 10.

On considère sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$t^2 y'' + t y' - y = 1. \tag{6}$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation homogène.
2. En déduire les solutions de (6) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. Terminer la résolution de (6) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 11.

On considère sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$\left(1+t^2\right) y'' + 4ty' + 2y = 0. \tag{7}$$

1. Déterminer les solutions de (7) développables en série entière.
2. Terminer la résolution de (7) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 12.

On considère sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$t\,(1-t)\, y'' + (1-3t)\, y' - y = 0. \tag{8}$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (8).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (8) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
3. Terminer la résolution de (8) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 13.

On considère sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$t^2\,(1-t)\, y'' - t\,(1+t)\, y' + y = 2t^3. \tag{9}$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation homogène.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (9) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
3. Terminer la résolution de (9) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 14.

Résoudre les systèmes différentiels suivants.

1. $\begin{cases} x' &= 4x - 2y \\ y' &= x + y \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x' &= -x + 3y \\ y' &= -2x + 4y \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$;
4. $\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$;
5. $\begin{cases} x' &= x - 4y \\ y' &= x - 3y \end{cases}$;
6. $\begin{cases} x' &= -x - y \\ y' &= x - 3y \end{cases}$.

Exercice 15.

Déterminer les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ pour les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 16.

Résoudre les systèmes différentiels suivants.

1. $\begin{cases} x' &= (2-t)\,x + (t-1)\,y \\ y' &= 2\,(1-t)\,x + (2t-1)\,y \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x' &= (t+3)\,x + 2y \\ y' &= -4x + (t-3)\,y \end{cases}$.

Exercice 17.

Résoudre l'équation différentielle $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ en utilisant un système différentiel.

Exercice 18.

Soit y une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} (y\,(t) + y'\,(t)) = 0$.
On pose $z = y + y'$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y + y' = z$.
2. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} y\,(t) = 0$.

Exercice 19.

Soit $A \in \mathscr{S}_n\,(\mathbf{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives. Soit $X : \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}\,(\mathbf{R})$ une solution du système différentiel $X' = AX$.
$\mathscr{M}_{n,1}\,(\mathbf{R})$ est muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall\,(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}\,(\mathbf{R})^2\,, \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y.$$

1. (a) Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n\,(\mathbf{R})$ et D une matrice diagonale dont les coefficients sur la diagonale sont positifs telles que $A = PDP^\top$.
   (b) En déduire que pour tout $Z \in \mathscr{M}_{n,1}\,(\mathbf{R})$, $\langle AZ, Z \rangle \geq 0$.
2. En la dérivant, montrer que la fonction $t \longmapsto \|X\,(t)\|^2$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

Exercice 20.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

Exercice 21.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \mathrm{d}t$.

On pose dans toute la suite $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t$. On admet que F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F'(x) = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$

2. En faisant une intégration par parties, montrer que F vérifie une équation différentielle du premier ordre.
3. En déduire une expression de $F(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.
   Indication : On pourra utiliser le fait que $F(0) = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 22.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f''(x) = -f(x).$$

2. En déduire qu'il existe deux réels A et B tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$

3. Conclure.

Exercice 23.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x)f(x) = 0$. Montrer que f est nulle.

Exercice 24.

Trouver toutes les applications dérivables $f : \mathbf{R}_+^\star \longrightarrow \mathbf{C}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 25.

En effectuant un changement de variable, résoudre sur $\mathbf{R}_+^\star$ l'équation différentielle $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.

Exercice 26.

Trouver toutes les applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Exercice 27.

Trouver toutes les applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivables en 0 telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x).$$