Chapitre 13 : Fonctions de plusieurs variables

Table des matières

Dans le chapitre, n est un entier naturel non nul.

1 Introduction à la topologie de $\mathbf{R}^n$

1.1 Norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$

Définition 1. *Norme euclidienne sur* $\mathbf{R}^n$.
La ***norme euclidienne*** *de* $\mathbf{R}^n$ *est l'application* $\|\cdot\|$ *définie par :*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Proposition 1. *Propriétés de la norme euclidienne.*
La norme euclidienne a les propriétés suivantes.

(i) *Positivité : pour tout* $x \in \mathbf{R}^n$, *on a* $\|x\| \geq 0$ *;*

(ii) *Séparation : pour tout* $x \in \mathbf{R}^n$, $\|x\| = 0$ *implique* $x = 0$ *;*

(iii) *Homogène : pour tout* $(\lambda, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *;*

(iv) *Inégalité triangulaire : pour tout* $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Démonstration. (i) C'est clair.

(ii) C'est clair car si $\|x\| = 0$, alors $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$, d'où $x_1 = \dots = x_n = 0$ car une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous les réels sont nul.

(iii) C'est clair car $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$.

(iv) On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \\
\iff \quad & \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)} \\
\iff \quad & \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)}.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie : c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire usuelle.

□

1.2 Distance euclidienne sur $\mathbf{R}^n$

Définition 2. *Distance euclidienne sur* $\mathbf{R}^n$.
La ***distance euclidienne*** *est l'application* d *définie sur* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ *par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|.$$

Proposition 2. *Propriétés de la distance euclidienne.*
La distance euclidienne vérifie les propriétés suivantes.

(i) *Positivité : pour tout* $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$.

(ii) *Séparation : pour tout* $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\mathrm{d}(x, y) = 0$ *si, et seulement si,* $x = y$.

(iii) *Symétrie : pour tout* $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.

(iv) *Inégalité triangulaire : pour tout* $(x, y, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, *on a :*

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y).$$

Démonstration. La preuve des points (i), (ii), (iii) et (iv) découlent toutes de la proposition 1.

□

1.3 Topologie de $\mathbf{R}^n$

Définition 3. *Boule ouverte/boule fermée.*
Soient $a \in \mathbf{R}^n$ et $r > 0$.

(i) *La* ***boule ouverte*** *de centre a et de rayon r est l'ensemble, noté $B(a,r)$ défini par*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbf{R}^n,\ \mathrm{d}(a,x) < r\}.$$

(ii) *La* ***boule fermée*** *de centre a et de rayon r est l'ensemble, noté $B_f(a,r)$ défini par*

$$B_f(a,r) = \{x \in \mathbf{R}^n,\ \mathrm{d}(a,x) \leq r\}.$$

Exemple 1. (i) Dans $\mathbf{R}$, on a $B(a,r) =]a-r, a+r[$ et $B_f(a,r) = [a-r, a+r]$.
(ii) Dans $\mathbf{R}^2$, les boules ouvertes sont des disques ouverts et les boules fermées sont des disques fermés.

Définition 4. *Partie bornée.*
Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Ω est dit ***borné*** *s'il existe $a \in \mathbf{R}^n$ et $r > 0$ tel que $\Omega \subset B(a,r)$.*

Définition 5. *Partie ouverte/partie fermée.*

(i) *Une partie $O \subset \mathbf{R}^n$ est dite* ***ouverte*** *si elle est vide ou si*

$$\forall x \in O,\ \exists r > 0 \quad B(x,r) \subset O.$$

(i) *Une partie $F \subset \mathbf{R}^n$ est dite* ***fermée*** *si son complémentaire est ouvert.*

Remarque 1. (i) Intuitivement, une partie de $\mathbf{R}^n$ est ouverte ne si elle ne contient pas son bord.
(ii) Intuitivement, une partie de $\mathbf{R}^n$ est fermée si elle contient son bord.

Proposition 3. *Une boule ouverte est un ouvert.*
Tout est dit dans le titre : une boule ouverte est bien un ouvert.

Démonstration. Soit $a \in \mathbf{R}^n$ et $r > 0$. Soit $x \in B(a,r)$. On note $d = \mathrm{d}(a,x) < r$. Soit $\varepsilon = \dfrac{r-d}{2}$, montrons que $B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$.

Soit $z \in B(x,\varepsilon)$. En utilisant l'inégalité triangulaire (proposition 2)

$$\mathrm{d}(a,z) \leq \mathrm{d}(a,x) + \mathrm{d}(x,z) \leq d + \varepsilon \leq d + \frac{r-d}{2} \leq \frac{r+d}{2} < r.$$

Ainsi, $z \in B(a,r)$.

□

Exemple 2. (i) L'intervalle $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbf{R}$, alors que l'intervalle $[a,b]$ est un fermé de $\mathbf{R}$.
(ii) L'ensemble $]0,1[\times]0,1[$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $[0,1] \times [0,1]$ est un fermé de $\mathbf{R}^2$.

Remarque 2. ⚠Un ensemble peut être ni ouvert, ni fermé ! Par exemple, l'ensemble $[0,1[$ n'est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbf{R}$.

Définition 6. *Point intérieur/extérieur/adhérent.*
Soit Ω une partie non vide de $\mathbf{R}^n$. Soit $x \in \mathbf{R}^n$.

(i) *On dit que x est* ***intérieur*** *à Ω, s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$.*
(ii) *On dit que x est* ***extérieur*** *à Ω, s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap \Omega = \varnothing$.*
(iii) *On dit que x est* ***adhérent*** *à Ω, si pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap \Omega \neq \varnothing$.*

Remarque 3. (i) Intuitivement, l'ensemble des points intérieurs d'une partie Ω de $\mathbf{R}^n$ est Ω privé de son bord.
(ii) Intuitivement, l'ensemble des points extérieurs d'une partie Ω de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ qui ne sont ni dans Ω si dans son bord.
(iii) L'ensemble des points intérieurs d'une partie de $\mathbf{R}^n$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$.

(iv) Intuitivement, les points adhérents à une partie Ω de $\mathbf{R}^n$ sont les points de la réunion entre Ω et son bord.

Exemple 3. (i) L'ensemble des points intérieurs à $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ et $]a, b[$ est $]a, b[$.

(ii) L'ensemble des points intérieurs à $B(a, r)$ ou $B_f(a, r)$ est $B(a, r)$.

(iii) L'ensemble des points intérieurs à $[0, 1] \times [0, 1]$ est $]0, 1[\times]0, 1[$.

(iv) L'ensemble des points extérieurs à $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ est $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

(v) L'ensemble des points adhérents à $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ et $]a, b[$ est $[a, b]$.

(vi) L'ensemble des points adhérents à $B(a, r)$ ou $B_f(a, r)$ est $B_f(a, r)$.

(vii) L'ensemble des points adhérents à $]0, 1[\times]0, 1[$ est $[0, 1] \times [0, 1]$.

(viii) De manière plus générale, on peut montrer qu'un point $x \in \mathbf{R}^n$ est adhérent à Ω si, et seulement si, $\inf\limits_{y \in \Omega} \|x - y\| = 0$. Autrement dit, Ω « s'approche aussi près que possible » de x.

Définition 7. *Frontière.*
*Soit Ω une partie de $\mathbf{R}^n$. La **frontière** de Ω est l'ensemble des points adhérents qui ne sont pas intérieurs.*

Exemple 4. (i) La frontière de $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ est $\{a, b\}$.

(ii) La frontière de $B(a, r)$ et $B_f(a, r)$ est $S = \{x \in \mathbf{R}^n,\ \mathrm{d}(a, x) = r\}$.

(iii) La frontière de $[0, 1[\times]0, 1]$ est le carré dont les sommets sont les points de coordonnées $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$.

2 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction avec Ω une partie non vide de $\mathbf{R}^n$.

Définition 8. *Applications partielles.*
*Soit $(x_i, \ldots, x_n) \in \Omega$. Les applications f_i ($i \in [\![1, n]\!]$) définies par $f_i : x \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ sont appelées les **applications partielles** de f en $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Définition 9. *Limite.*
*Soient a un point adhérent à Ω et $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f a pour **limite** ℓ en a si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \Omega, \quad (\mathrm{d}(x, a) < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque 4. Lorsque $n = 1$, on retrouve la définition de la limite vue en TSI 1.

Définition 10. *Continuité.*
*Soit $a \in \Omega$. On dit que f est **continue** en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Proposition 4. *Continuité des applications partielles.*
Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Si f est continue sur en $(a_1, \ldots, a_n)$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application partielle $f_i : t \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ est continue en a_i.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en $(a_1, \ldots, a_n)$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad (\mathrm{d}(x, a) < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon). \tag{1}$$

On remarque que si $t \in \mathbf{R}$ est tel que $(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \Omega$ et $|t - a_i| < \alpha$, alors

$$\mathrm{d}((a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n), (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)) = \sqrt{(t - a_i)^2} = |t - a_i| < \alpha.$$

Ainsi, en utilisant la ligne (1), on a

$$\forall t \in \mathbf{R},\ ((a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \Omega \text{ et } |t - a_i| < \alpha) \Longrightarrow (|f_i(t) - \underbrace{f_i(a_i)}_{=f(a)}| < \varepsilon).$$

Ainsi, f_i est continue en a_i.

$\square$

⚠La réciproque de ce résultat est fausse comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 5. Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

f n'est pas continue en $(0,0)$ car

$$\forall t \in \mathbf{R}^\star, \quad f(t,t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0.$$

Cependant les applications partielles sont continues sur $\mathbf{R}$.

Définition 11. *Continuité sur une partie.*
*On dit que f est **continue** sur Ω si f est continue en chacun des points de Ω.*

Notation. *On note $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de Ω dans $\mathbf{R}$.*

Proposition 5. *Opérations sur les fonctions continues.*
La preuve est la même que celle faite pour les opérations de continuité sur les fonctions réelles.

Démonstration. Adapter la preuve faite pour les fonctions d'une variable réelle. □

Proposition 6. *Continuité d'une composition.*
On suppose que f est continue sur Ω. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ tel que $f(\Omega) \subset I$. Soit $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.
Alors, la fonction $g \circ f$ est continue sur Ω.

Démonstration. Adapter la preuve faite pour les fonctions d'une variable réelle. □

Exemple 6.
(i) Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbf{R}^n$, par exemple, $f : (x,y) \longmapsto x^{2021}y^{2020} + x^{1989}y^{2000} + \mathrm{e}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.
(ii) Les fonctions rationnelles sont continues sur leurs ensembles de définition, par exemple $(x,y) \longmapsto \dfrac{x^3y^4 + x^2y + 3}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(iii) Les exemples précédents et la proposition 6 permettent de « créer » de nouvelles fonctions continues, par exemple $(x,y) \longmapsto \sin\left(x^{2021}y^{2020} + x^{1989}y^{2000} + \mathrm{e}\right)$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Théorème 1. *Théorème des bornes atteintes de Weierstrass.*
Si f est continue sur Ω que l'on suppose fermé et borné, alors f est bornée sur Ω et atteint ses bornes : il existe $(a,b) \in \Omega \times \Omega$ tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Démonstration. Admis. □

3 Calcul différentiel

Dans cette partie, Ω est un ouvert non vide et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction.

3.1 Dérivées partielles

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Définition 12. *Dérivées partielles premières.*
*Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ et $i \in [\![1, n]\!]$. On appelle **dérivée partielle première de f par rapport à la i-ème variable en a** la quantité suivante (sous réserve d'existence)*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{h}.$$

Remarque 5. (i) Lorsque $n = 2$, les dérivées partielles sont très souvent notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Lorsque $n = 3$, on les note $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

(ii) Ainsi, la dérivée partielle de f par rapport à la i-ième variable en $a = (a_1, \ldots, a_n)$ est la dérivée de l'application partielle f_i en a_i. En particulier, toutes les règles connues pour dériver les fonctions d'une variable réelle s'appliquent.

Exemple 7. Soit $f(x, y) = 3y^2x + x^2 + \sin(y)$. Les fonctions partielles sont bien dérivables sur $\mathbf{R}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y^2 + 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy + \cos(y).$$

Définition 13. *Gradient.*
*Soit $a \in \Omega$. On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à toutes les variables en a. On définit le **gradient** de f en a par :*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbf{R}^n.$$

Exemple 8. Soit $f(x, y) = xy$. f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbf{R}^2$ et $\nabla f(x, y) = (y, x)$.

Définition 14. *Point critique.*
*Soit $a \in \Omega$. On dit que a est un **point critique** pour f en a si $\nabla f(a) = 0$.*

Exemple 9. Soit $f(x, y) = x^2 - y^2$. f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbf{R}^2$ et $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. On en déduit que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f.

3.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 15. *Classe $\mathscr{C}^1$.*
*On dit que f est de **classe $\mathscr{C}^1$** sur Ω si toutes les dérivées partielles premières existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.*

Notation. *On note $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.*

Proposition 7. *Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.*
Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

(i) *$\lambda f + g$ et fg sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω ;*

(ii) *si g ne s'annule pas sur Ω, $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème sur les opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ pour les fonctions réelles aux applications partielles.

□

Exemple 10. Les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur ensemble de définition.

Proposition 8. *Développement limité d'ordre* 1.
Soit $a \in \Omega$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $a + h \in \Omega$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, h_k + o(\|h\|) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|).$$

*On dit que f admet un **développement limité d'ordre 1**.*

Démonstration. Admis. □

Corollaire 1. *Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, alors f est continue sur Ω.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$. D'après la proposition 8, pour tout $h \in \mathbf{R}^n$ tel que $a + h \in \Omega$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, h_k + o(\|h\|).$$

Comme

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, h_k = 0,$$

on a $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. □

3.3 Dérivées partielles d'une composée

Dans cette sous-partie, Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application.

Proposition 9. *Règle de la chaîne.*
Soit $(x, y) : I \longrightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, alors l'application F définie par

$$\forall t \in I, \quad F(t) = f(x(t), y(t))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a :

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Remarque 6. Par abus de notation, on utilise parfois la notation différentielle

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y.$$

Démonstration. Soit $t \in I$ et soit $h \in \mathbf{R}$ tel que $t + h \in I$. Comme les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, elles admettent un développement limité en t : il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 vérifiant $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0$ telles que

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)\, h + h\varepsilon_1(h) \quad \text{et} \quad y(t+h) = y(t) + y'(t)\, h + h\varepsilon_2(h). \tag{2}$$

En utilisant la ligne (2) et la proposition 8, on peut écrire

$$\begin{aligned}
F(t+h) &= f(x(t+h), y(t+h)) \\
&= f\big(x(t) + x'(t)\, h + h\varepsilon_1(h), y(t) + y'(t)\, h + h\varepsilon_2(h)\big) \\
&= f(x(t), y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \big(x'(t)\, h + h\varepsilon_1(h)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \big(y'(t)\, h + h\varepsilon_2(h)\big) \\
&\quad + o\Big(\big\|\big(x'(t)\, h + h\varepsilon_1(h), y'(t)\, h + h\varepsilon_2(h)\big)\big\|\Big).
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on écrit x pour $x(t)$, x' pour $x'(t)$. De même, on écrit y pour $y(t)$ et y' pour $y'(t)$.
Comme

$$o\left(\left\|\left(x'(t)\,h + h\varepsilon_1(h), y'(t)\,h + h\varepsilon_2(h)\right)\right\|\right) = |h|\sqrt{(x'+\varepsilon_1(h))^2 + (y'+\varepsilon_2(h))^2}\varepsilon_3(h)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} F(t+h) &= F(t) + h\left(x'\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y'\frac{\partial f}{\partial f}(x,y)\right) \\ &+ h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\varepsilon_1(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\varepsilon_2(h) + \operatorname{sgn}(h)\sqrt{(x'+\varepsilon_1(h))^2 + (y'+\varepsilon_2(h))^2}\varepsilon_3(h)\right). \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_i(h) = 0$ ($i \in [\![1,3]\!]$), on en déduit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = x'\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y'\frac{\partial f}{\partial f}(x,y).$$

Il est facile de constater que F' est continue sur I par opérations sur les fonctions continues.

□

Exemple 11. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. Soit F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(t) = f\left(t^2, \sin(t)\right)$. D'après la règle de la chaîne, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}\left(t^2, \sin(t)\right) + \cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}\left(t^2, \sin(t)\right).$$

Proposition 10. *Règles de la chaîne, version longue !*
Soit O un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$, soit $(x,y) : O \longrightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^2$ une fonction telle que les fonctions x et y soient de classe $\mathscr{C}^1$ sur O. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, alors la fonction F définie sur O par :

$$\forall (u,v) \in O^2, \quad F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur O et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Remarque 7. (i) Par abus de notation, on utilise parfois la notation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

1. La proposition se généralise aux fonctions de trois variables de façon naturelle, c'est juste long à écrire !

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 9 aux applications

$$u \longmapsto F(x(u,v), y(u,v)) \quad (v \text{ fixé})$$

et

$$v \longmapsto F(x(u,v), y(u,v)) \quad (u \text{ fixé}).$$

□

Exemple 12. Si on écrit $x = au + bv$ et $y = cu + dv$ avec un quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$, alors on a les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a,\ \frac{\partial x}{\partial v} = b,\ \frac{\partial y}{\partial u} = c \text{ et } \frac{\partial y}{\partial v} = d.$$

Si $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, alors la fonction F définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2, \quad F(u, v) = f(au + bv, cu + dv)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + c\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = b\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + d\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Exemple 13. Si l'on écrit $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, alors on a

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta), \ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta) \ \text{et} \ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta).$$

Si $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, alors la fonction F définie sur $\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}$ par

$$\forall (r, \theta) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}, \quad F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

est de classe sur $\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}$ et

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

3.4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Dans cette sous-partie, f est une application définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

Définition 16. *Dérivées partielles secondes.*
On définit les ***dérivées partielles secondes*** *de f, sous réserve d'existence, comme les dérivées partielles premières des applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.*

Remarque 8. (i) Si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, l'application $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ est notée plus simplement $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Lorsque $i = j$, on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

(ii) Il y a, a priori, n^2 dérivées partielles secondes.

(iii) Lorsque $n = 2$, il y a donc quatre dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \ \text{et} \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Définition 17. *Classe $\mathscr{C}^2$.*
On dit que f est de ***classe $\mathscr{C}^2$*** *sur Ω si f admet des dérivées partielles secondes et qu'elles sont continues sur Ω.*

Notation. *On note $\mathscr{C}^2(\Omega, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.*

Proposition 11. *Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.*
Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

(i) *$\lambda f + g$ et fg sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω ;*

(ii) *si g ne s'annule pas sur Ω, $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème sur les opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ pour les fonctions réelles aux applications partielles.

□

Exemple 14. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$, les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur leurs ensembles de définition.

Théorème 2. *Théorème de Schwarz.*

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω. Alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 15. Calcul du laplacien en coordonnées polaires.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors, on a :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

où $F(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}$ car f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les fonctions $(r,\theta) \longmapsto r\cos(\theta)$ et $(r,\theta) \longmapsto r\sin(\theta)$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}$. D'après la règle de la chaîne, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

On a aussi (en omettant les variables) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= \cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\
&= \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= -r\left(\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos(\theta)\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}\right)\right) \\
&\quad + r\left(-\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + \cos(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r\cos(\theta)\frac{\partial f^2}{\partial^2 y}\right)\right) \\
&= -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{r}\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \\
&\quad -\frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r}\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
&= \left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \Delta f.
\end{aligned}$$

4 Recherche d'extrema

4.1 Généralités

Dans cette partie, Ω est une partie non vide et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est une application.

Définition 18. *Minimum/maximum/extremum global.*
Soit $a \in \Omega$.

(i) *On dit que f admet un* ***minimum global*** *en a si*

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) \geq f(a).$$

Ce minimum est alors atteint en a (et peut-être ailleurs).

(ii) *On dit que f admet un* ***maximum global*** *en a si*

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) \leq f(a).$$

Ce maximum est alors atteint en a (et peut-être ailleurs).

(iii) *On dit que f admet un* ***extremum global*** *en a si f admet un minimum global en a ou un maximum global en a.*

Définition 19. *Minimum/maximum/extremum local.*
Soit $a \in \Omega$.

(i) *On dit que f admet un* ***minimum local*** *en a si*

$$\exists r > 0,\ \forall x \in \Omega \cap B(a, r), \quad f(x) \geq f(a).$$

Ce minimum est alors atteint en a (et peut-être ailleurs).

(ii) *On dit que f admet un* ***maximum local*** *en a si*

$$\exists r > 0,\ \forall x \in \Omega \cap B(a, r), \quad f(x) \leq f(a).$$

Ce maximum est alors atteint en a (et peut-être ailleurs).

(iii) *On dit que f admet un* ***extremum local*** *en a si f admet un minimum local en a ou un maximum local en a.*

Remarque 9. Par définition, un minimum/maximum/extremum global est un minimum/maximum/extremum local. La réciproque est fausse.

Proposition 12. *Une condition nécessaire d'existence d'extremum sur un ouvert.*
On suppose que Ω est ouvert. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f, i.e. $\nabla f(a) = 0$.

Remarque 10. (i) L'hypothèse « Ω ouvert » est fondamentale. Par exemple, la fonction $f : x \in [0, 1] \longmapsto x$ est de classe $\mathscr{C}^1$, admet un maximum global en 1 et $f'(1) = 1 \neq 0$.

(ii) La condition est uniquement une condition **nécessaire** et n'est pas **suffisante**. Par exemple, la fonction $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto x^2 - y^2$ admet un point critique en $(0, 0)$ et $(0, 0)$ n'est pas un extremum local car pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $f(x, 0) > 0$ et pour tout $y \in \mathbf{R}^\star$, $f(0, y) = y^2 < 0$.

Démonstration. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que f admet un maximum en $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Comme f est supposée de classe $\mathscr{C}^1$, f admet des dérivées partielles premières en tout point.

Pour montrer que $\nabla(f)(a) = 0$, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^-} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t}. \end{aligned}$$

Comme f admet un maximum en a, on a : pour tout $t \in \mathbf{R}$ tel que $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \Omega$, $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \leq 0$, ainsi

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t} \leq 0.$$

On montre de même que

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t} \geq 0,$$

ce qui permet de conclure que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

□

4.2 Exemples

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ où Ω est une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$. On s'intéresse aux extrema de f. On peut suivre le plan suivant.

1. On vérifie que Ω est une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$ et que f est une application continue, ce qui justifie que f admet un maximum et un minimum sur Ω par le théorème 1.
2. On désigne par U l'ensemble des points intérieurs de Ω. On justifie que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U. On détermine les points critiques de l'application $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$, puis on calcul l'image par f de chacun de ces points (car les éventuels extrema locaux de f sur l'ouvert U sont aux points critiques).
3. On détermine les extrema de l'application $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ en se ramenant à l'étude de fonctions à une variable réelle.
4. On conclut en comparant les différentes valeurs de f trouvées.

Exemple 16. Étudions les extrema de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ sur $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

f est continue sur Ω fermé, borné, donc f admet un maximum et un minimum.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $]-1, 1[\times]-1, 1[$. Les points critiques sont les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x & = 0 \\ -2y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}.$$

Seul le couple $(0, 0)$ est un point critique et $f(0, 0) = 0$.

Les points de $\partial\Omega$ sont les points qui sont de la forme

$$(t, -1), \ (t, 1), \ (-1, t) \text{ et } (1, t) \quad \text{avec } t \in [-1, 1].$$

On étudie les fonctions suivantes sur $[-1, 1]$

$$h_1(t) = f(t, -1) = t^2 - 1, \ h_2(t) = f(t, 1) = t^2 - 1, \ h_3(t) = f(-1, t) = 1 - t^2 \text{ et } h_4(t) = f(1, t) = 1 - t^2.$$

L'étude facile de ces fonctions montre que la maximum de f est sur $\partial\Omega$, ce maximum est égal à 1 et est atteint pour les points de coordonnées $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. De même, le minimum de f est sur $\partial\Omega$, ce minimum vaut -1 et est atteint pour les point de coordonnées $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

Exemple 17. On souhaite étudier le maximum de la fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$ sur $[0, 1]^2$.

f est continue sur Ω fermé, borné, donc f admet son maximum sur $[0, 1]^2$.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $]-1, 1[\times]-1, 1[$. Les points critiques sont les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1 - 2xy - x^2}{(1 + x^2)^2 (1 + y^2)} & = 0 \\ \dfrac{1 - 2xy - y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)^2} & = 0 \end{cases}.$$

Seul le couple $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ convient, donc c'est le seul point critique de f sur $]0,1[\times]0,1[$. La valeur de f en ce point est $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Les points de $\partial\Omega$ sont de la forme

$$(0,t)\,,\ (t,0)\,,\ (1,t)\ \text{ et }\ (t,1) \quad \text{avec } t \in [0,1]\,.$$

Les valeurs de f prises sur $\partial\Omega$ sont donc les valeurs prises sur $[0,1]$ par les applications $h_1, h_2, h_3, h_4 : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ données par

$$h_1(t) = f(0,t)\,,\ h_2(t) = f(t,0)\,,\ h_3(t) = f(1,t) \text{ et } h_4(t) = f(t,1)\,.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$h_1(t) = h_2(t) = \frac{t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad h_3(t) = h_4(t) = \frac{1+t}{2(1+t^2)}.$$

En effectuant des études classiques de fonctions d'une variable, on obtient les tableaux de variations suivants.

t	0		1
h_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

et

t	0		$\sqrt{2}-1$		1
h_3	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+1\right)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

On en déduit que le maximum de f sur $\partial\Omega$ vaut

$$\max_{\partial\Omega} f = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right\} = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

et qu'il est atteint aux points de coordonnées $\left(\sqrt{2}-1, 1\right), \left(1, \sqrt{2}-1\right)$.

On conclut que le maximum de f sur $\Omega = [0,1]^2$ est $\max_{\Omega} f = \max\left\{\frac{\sqrt{2}+1}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right\} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ et il atteint en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

5 Résolution de quelques équations aux dérivées partielles

5.1 Équations aux dérivées partielles

Il n'y a pas de méthode générale de résolution pour les équations aux dérivées partielles. On utilise souvent des changements de variable qui sont donnés dans les énoncés. Nous allons traiter plusieurs exemples.

Exemple 18. On cherche les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f. \tag{3}$$

On utilise le changement de variables

$$(u,v) = (x+y, x-y) \iff (x,y) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

D'après la règle de la chaîne, la fonction F définie sur $\mathbf{R}^2$ définie par

$$\forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad F(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{1}{2}F.$$

On en déduit que f est solution de (3) si, et seulement si, $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{1}{2}F$.

C'est une équation différentielle d'ordre 1 en u que l'on sait résoudre. On en déduit qu'il existe une fonction $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (u,v), \quad F(u,v) = h(v)\exp\left(\frac{u}{2}\right).$$

Finalement, on obtient que les solutions de (3) sont les fonctions

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = h(x-y)\exp\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

où $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple 19. On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

On utilise les coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Par la règle de la chaîne, la fonction F définie sur $\mathbf{R}_+^\star \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}_+^\star \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) \\
&= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\
&= \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a montré que f est solution de (4) si, et seulement si, $\dfrac{\partial F}{\partial r} = 0$.

On en déduit qu'il existe une fonction $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbf{R}_+^\star \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad F(r,\theta) = g(\theta).$$

Comme $\theta = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, on en conclut que les solutions de (4) sont

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^\star \times \mathbf{R}, \quad f(x,y) = g\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

où $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple 20. On cherche les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

On utilise le changement de variable

$$(u, v) = (x, x + y) \iff (x, y) = (u, u - v) .$$

D'après la règle de la chaîne la fonction F définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2, \quad F(u, v) = f(u, v - u)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) .$$

En redérivant à nouveau, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y)\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y)\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a montré que f est solution de (5) si, et seulement si, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$.

Il existe donc deux fonctions $h, k : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2, \quad F(u, v) = k(v)\, u + h(v) .$$

Finalement, les solutions de (5) sont

$$f(x, y) = k(x + y)\, x + h(x + y)$$

où $h, k : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

5.2 Systèmes d'équations aux dérivées partielles

On fixe deux intervalles ouverts non vides I et J de $\mathbf{R}$, ainsi que deux fonctions $g : I \times J \longrightarrow \mathbf{R}$ et $h : I \times J \longrightarrow \mathbf{R}$ continues. On cherche à déterminer les fonctions $f : I \times J \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h.$$

On pourra suivre le plan suivant.

1. On résout la première équation en prenant une primitive par rapport à x.
2. On remplace l'expression obtenue dans la seconde équation.
3. On en déduit l'ensemble des solutions.

Remarque 11. Si les fonctions g et$h$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et si le système admet une solution, on a nécessairement d'après le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Si cette relation n'est pas vérifiée, le système n'a pas de solution. Ainsi, dans le cas où g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$, on commencera par vérifier que l'on a cette relation avant d'employer la méthode ci-dessus.

Exemple 21. On cherche les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy^2. \tag{6}$$

On pose $g : (x,y) \longmapsto x^2 y$ et $h : (x,y) \longmapsto xy^2$. Les fonctions g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 \neq y^2 = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y).$$

On en déduit que le système d'équations (6) n'a pas de solution.

Exemple 22. On cherche les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y. \tag{7}$$

On pose $g : (x,y) \longmapsto xy^2$ et $h : (x,y) \longmapsto x^2 y$. Les fonctions g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2xy = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y).$$

La première équation donne

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y^2 + K(y)$$

où $K : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. En substituant dans la seconde équation, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x^2 y + K'(y) = x^2 y,$$

donc $K' = 0$. On en déduit que K est constante. Finalement les solutions de (7) sont les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y^2 + K \quad \text{avec} \quad K \in \mathbf{R}.$$

6 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, ne vous serviront très probablement pas aux concours ! !

6.1 Étude de la continuité des applications linéaires

Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on note $\|\cdot\|_n$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$. Dans tout cette sous-partie, u est une application définie sur une partie Ω de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$.

Définition 20. *Continuité en un point.*
*Soit $x_0 \in \Omega$. On dit que u est **continue** en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \Omega, \quad (\|x - x_0\|_n < \alpha) \Longrightarrow \Big(\|u(x) - u(x_0)\|_p < \varepsilon\Big).$$

Remarque 12. Lorsque $p = 1$, on retrouve la définition 10 donnée ci-dessus.

Définition 21. *Continuité sur une partie Ω de $\mathbf{R}^n$.*
On dit que u est continue sur une partie Ω de $\mathbf{R}^n$ si u est continue en chacun des points de Ω.

Lorsque u est supposée linéaire, la situation est beaucoup plus simple. Dans toute la suite de cette sous-partie, u est supposée linéaire et donc $\Omega = \mathbf{R}^n$.

Proposition 13. *On a les équivalences suivantes entre les assertions suivantes.*

(i) *u est continue sur $\mathbf{R}^n$.*

(ii) *u est continue en un point de $\mathbf{R}^n$.*

Démonstration. On prouve séparemment les deux implications.

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ C'est clair.

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ Supposons u continue en $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Soit $x_1 \in \mathbf{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad (\|x - x_0\|_n < \alpha) \Longrightarrow \Big(\|u(x) - u(x_0)\|_p < \varepsilon\Big). \tag{8}$$

Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x - x_1\|_n < \alpha$. On a donc $\|(x - x_1 + x_0) - x_0\|_n < \alpha$, ainsi d'après (8), on a

$$\|u(x - x_1 + x_0) - u(x_0)\|_p < \varepsilon.$$

La linéarité de u permet alors d'écrire que

$$\|u(x) - u(x_1)\|_p < \varepsilon.$$

On a montré que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad (\|x - x_1\|_n < \alpha) \Longrightarrow \Big(\|u(x) - u(x_1)\|_p < \varepsilon\Big).$$

u est continue en chaque $x_1 \in \mathbf{R}^n$, u est donc continue sur $\mathbf{R}^n$.

□

Proposition 14. *Caractérisation des applications linéaires continues.*
On a équivalence entre les assertions suivantes.

1. *u est continue sur $\mathbf{R}^n$.*
2. *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\|u(x)\|_p \leq M\|x\|_n$.*

Démonstration. On prouve séparemment les deux implications.

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Comme u est continue sur $\mathbf{R}^n$, en particulier, u est continue en 0, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \qquad (\|x\|_n < \alpha) \Longrightarrow \Big(\|u(x)\|_p < 1\Big).$$

Comme $x \in \mathbf{R}^n$ non nul. Il est clair que la norme du vecteur $\dfrac{\alpha}{2\|x\|}x$ est strictement inférieure à α, ainsi $\left\|u\left(\dfrac{\alpha}{2\|x\|}x\right)\right\|_p < 1$, ainsi par linéarité

$$\|u(x)\|_p \leq \frac{2}{\alpha}\|x\|_n.$$

Il est clair que cette inégalité est vérifiée par le vecteur nul. Ainsi, on a bien

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \|u(x)\|_p \leq \frac{2}{\alpha}\|x\|_n.$$

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ D'après la proposition 13, il suffit de montrer la continuité de u en 0. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\|_p < \alpha$, on a

$$\|u(x) - u(0)\|_p \leq M\|x\|_n \leq \frac{M\varepsilon}{M} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, u est continue en 0.

□

Proposition 15. *Toutes les applications linéaires sont continues !*
Toute application linéaire $u : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ est continue.

Démonstration. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de x dans la base canonique. On a

$$\begin{aligned} \left\|u(x)\right\|_p &= \left\|x_1 u(e_1) + \dots + x_n u(e_n)\right\|_p \\ &\leq |x_1| \left\|u(e_1)\right\|_p + \dots + |x_n| \left\|u(e_n)\right\|_p \quad \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \end{aligned}$$

où $M = \max\left\{\left\|u(e_1)\right\|_p, \dots, \left\|u(e_n)\right\|_p\right\}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{n}\left\|x\right\|_n$, ainsi

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \left\|u(x)\right\|_p \leq M\sqrt{n}\left\|x\right\|_n.$$

La proposition (14) assure que u est continue sur $\mathbf{R}^n$

$\square$

Définition 22. *Norme d'opérateur.*

Pour toute application linéaire $u : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$, *on pose*

$$\left\|u\right\|_{\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p} = \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\left\|u(x)\right\|_p}{\left\|x\right\|_n}.$$

Remarque 13. $\left\|u\right\|_{\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p}$ est la plus petite constante M telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \left\|u(x)\right\|_p \leq M\left\|x\right\|_n.$$

6.2 Une preuve du théorème spectral

Le but de cette sous-partie est de donner une preuve du théorème spectral vu au chapitre 10 : « Isométries d'un espace euclidien ». On en rappelle l'énoncé.

Théorème 3. *Théorème spectral.*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ *une matrice symétrique. Il existe* $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ *et une matrice* D *diagonale telles que*

$$A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. On munit $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est A. Notons que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, en notant X et Y les matrices des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$,

$$\langle u(x), y \rangle = (AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T A Y = \langle x, u(y) \rangle. \tag{9}$$

Soit $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n, \ \|x\| = 1\}$. On remarque (admet ?) que $\mathbf{S}^{n-1}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^n$.

Soit l'application φ définie sur $\mathbf{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \varphi(x) = \langle u(x), x \rangle.$$

D'après la proposition 15, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \|u(x)\| \leq M\|x\|. \tag{10}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et $h \in \mathbf{R}^n$, on a

$$\begin{array}{rcll} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| & = & |\langle u(h), x\rangle + \langle u(h), h\rangle| & \\ & \leq & |\langle u(h), x\rangle| + |\langle u(h), h\rangle| & \\ & \leq & \|u(h)\| \|x\| + \|u(h)\| \|u(h)\| & \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ & \leq & M\|h\|\|x\| + M^2\|h\|^2. & \end{array}$$

Comme $\lim_{h\to 0}\left(M\|h\|\|x\| + M^2\|h\|^2\right) = 0$, on en déduit que $\lim_{h\to 0}\varphi(x+h) = \varphi(x)$: φ est continue en x, puis sur $\mathbf{R}^n$.

Comme $\mathbf{S}^{n-1}$ est fermé et borné, d'après le théorème 1, φ atteint son maximum en un vecteur $x_0 \in \mathbf{S}^{n-1}$.

Soit $x_1 \in \mathbf{S}^{n-1}$ orthogonal à x_0. Soit γ la fonction vectorielle définie sur $]-\pi,\pi[$ par $\gamma(t) = \cos(t)x_0 + \sin(t)x_1$. Soit aussi F définie sur $]-\pi,\pi[$ par $F(t) = \varphi(\gamma(t))$.

Comme x_0 et x_1 sont orthogonaux et unitaires (de norme 1), par le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in]-\pi,\pi[, \quad \|\gamma(t)\|^2 & = & \|\cos(t)x_0 + \sin(t)x_1\|^2 \\ & = & \cos^2(t)\|x_0\|^2 + \sin^2(t)\|x_1\|^2 \\ & = & 1. \end{array}$$

Ainsi, pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, $\gamma(t) \in \mathbf{S}^{n-1}$.

Pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, en utilisant la linéarité de u, la bilinéarité du produit scalaire et la ligne (9), on a :

$$\begin{array}{rcl} F(t) & = & \langle u(\cos(t)u_0 + \sin(t)x_1), \cos(t)x_0 + \sin(t)x_1\rangle \\ & = & \langle \cos(t)u(u_0) + \sin(t)u(x_1), \cos(t)x_0 + \sin(t)x_1\rangle \\ & = & \cos^2(t)\langle x_0, u(x_0)\rangle + \cos(t)\sin(t)\left(\langle u(x_1), x_0\rangle + \langle x_1, u(x_0)\rangle\right) + \sin^2(t)\langle u(x_1), x_1\rangle \\ & = & \cos^2(t)F(0) + 2\cos(t)\sin(t)\langle x_1, u(x_0)\rangle + \sin^2(t)\langle u(x_1), x_1\rangle. \end{array}$$

Or,

$$\cos^2(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + o(t), \quad 2\cos(t)\sin(t) \underset{t\to 0}{=} 2(1+o(t))(t+o(t)) \underset{t\to 0}{=} 2t + o(t) \quad \text{et} \quad \sin^2(t) \underset{t\to 0}{=} o(t).$$

Il s'ensuit que

$$F(t) \underset{t\to 0}{=} F(0) + 2\langle x_1, u(x_0)\rangle t + o(t).$$

En particulier, F est dérivable en 0 et $F'(0) = 2\langle x_1, u(x_0)\rangle$.

Or, par définition de x_0, pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, on a $F(t) \leq F(0)$. Ainsi, F admet un maximum en 0 et est définie sur un intervalle ouvert autour de 0, il s'ensuit que $F'(0) = 0$.

Les résultats établis ci-dessus montrent que

$$\forall x_1 \in \mathrm{Vect}(x_0)^\perp, \quad \langle u(x_0), x_1\rangle = 0.$$

Il s'ensuit que

$$u(x_0) \in \left(\mathrm{Vect}(x_0)^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(x_0),$$

on en déduit que $u(x_0)$ et x_0 sont colinéaires : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.

On peut enfin conclure la preuve du théorème spectral en raisonnant par récurrence.

Le résultat est clair en dimension 1.

Soit $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et pour tout $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^k\right)$ vérifiant (9), il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que

$$\mathbf{R}^k = E_{\lambda_1}(u) \oplus^\perp E_{\lambda_2}(u) \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp E_{\lambda_r}(u).$$

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$. D'après ci-dessus, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $E_\lambda(u) \neq \{0\}$.

Comme $E_\lambda(u)$ est stable par u et

$$\mathbf{R}^n = E_\lambda(u) \oplus E_\lambda(u)^\perp.$$

Il est facile de voir $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u et $u_{|E_\lambda(u)^\perp}$ est un endomorphisme de $E_\lambda(u)^\perp$ vérifiant la relation (9).

Comme $\dim\left(E_\lambda(u)^\perp\right) < n$ et comme il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $E_\lambda(u)^\perp$ et un certain $\mathbf{R}^k$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$ (car $\dim(E_\lambda(u)) \geq 1$), par hypothèse de récurrence il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ tels que

$$E_\lambda(u)^\perp = \widetilde{E}_{\lambda_1}(u) \oplus^\perp \ldots \oplus^\perp \widetilde{E}_{\lambda_\ell}(u)$$

où pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$,

$$\widetilde{E}_{\lambda_i}(u) = \operatorname{Ker}\left(u_{|E_\lambda(u)^\perp} - \lambda_i \operatorname{id}_{E_\lambda(u)^\perp}\right).$$

Or, pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$,

$$\operatorname{Ker}\left(u_{|E_\lambda(u)^\perp} - \lambda_i \operatorname{id}_{E_\lambda(u)^\perp}\right) = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda_i \operatorname{id}_{\mathbf{R}^n}\right) = E_{\lambda_i}(u).$$

On a montré que

$$\mathbf{R}^n = E_\lambda(u) \oplus^\perp E_\lambda(u)^\perp = E_\lambda(u) \oplus^\perp E_{\lambda_1}(u) \oplus^\perp \ldots \oplus^\perp E_{\lambda_\ell}(u).$$

Le résultat est vrai dans $\mathbf{R}^n$.