Chapitre 12 : Probabilité sur un univers dénombrable

Table des matières

1 Espaces probabilisés dénombrables

1.1 Rappels sur les applications

Définition 1. *Application injective/surjective/bijective.*
Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que :

(i) *f est **injective** si*
$$\forall \left(x, x'\right) \in E^2, \quad \left(f(x) = f\left(x'\right)\right) \Longrightarrow \left(x = x'\right).$$

(ii) *f est **surjective** si*
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

(iii) *f est **bijective** si f est injective et surjective.*

Proposition 1. *Caractérisation des bijections.*
Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, si et seulement si, tout élément de F admet un unique antécédent par f.

Démonstration. Voir cours de TSI 1.

□

Définition 2. *Application réciproque.*
Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective.
D'après la proposition 1, tout élément $y \in F$ admet un unique antécédent par f. On le note $f^{-1}(y)$.
*L'application $f^{-1} : \begin{cases} F & \longrightarrow E \\ y & \longmapsto \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{cases}$ s'appelle la **bijection réciproque** de f.*

Proposition 2. *Relation entre une application bijective et sa réciproque.*
Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Alors, on a :
$$\forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F, \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$

Démonstration. Voir cours de TSI 1.

□

1.2 Ensembles dénombrables

Définition 3. *Ensemble dénombrable.*
*On dit qu'un ensemble est **dénombrable** s'il existe une bijection entre cet ensemble et $\mathbf{N}$.*

Remarque 1. La notion de dénombrabilité n'est pas parfaitement définie : pour certains la définition précédente englobe les ensembles finis.

Exemple 1.
1. $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ sont dénombrables.
2. Tout intervalle de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux éléments n'est pas dénombrable.

1.3 Probabilités sur un univers dénombrable

Dans la suite du chapitre, Ω est un univers dénombrable modélisant une expérience aléatoire. Nous allons étendre les définitions vues au chapitre 7.

Définition 4. *Probabilité.*
*On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ telle que :*

(i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ *;*

(ii) *pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux à deux incompatibles, on a*
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Proposition 3. *Propriétés des probabilités.*

Soit $\mathbf{P}$ *sur une probabilité sur un univers* Ω*. On a :*

(i) *pour tout* $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$*, en particulier,* $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$ *;*

(ii) *pour tout* $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$*, si* $A \subset B$*, alors* $\mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$*, en particulier* $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ *;*

(iii) *pour tout* $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Démonstration. La preuve est la même que celle de la proposition 1 du chapitre 7.

□

Proposition 4. *Si* $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ *et si* $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite de nombres positifs telle que la série* $\sum_{n\geq 0} p_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$*, alors il existe une unique probabilité* $\mathbf{P}$ *sur* Ω *telle que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(\{\omega_n\}) = p_n.$$

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve de la proposition 2 du chapitre 7.

□

Remarque 2. Autrement dit, pour définir une probabilité $\mathbf{P}$ sur un univers dénombrable Ω, il suffit de définir $\mathbf{P}$ sur chaque singleton de Ω (aussi appelé **événement élémentaire**) de sorte que la somme donne 1. La formule générale est alors donnée par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$

Exemple 2. Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1$, d'après la proposition ci-dessus, il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ définie sur $\Omega = \mathbf{N}^\star$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

1.4 Conditionnement par un événement

Définition 5. *Probabilité conditionnelle.*

Soient A *et* B *deux événements avec* $\mathbf{P}(B) \neq 0$*. On définit la* ***probabilité de A sachant B****, notée* $\mathbf{P}_B(A)$*, par*

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Remarque 3. On utilise aussi parfois la notation $\mathbf{P}(A|B)$.

Exemple 3. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note les événements A : « on obtient 6 » et B : « on obtient un nombre pair ». On a

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 5. *Si* B *est un événement de probabilité non nulle, l'application* $\mathbf{P}_B : A \in \mathscr{P}(\Omega) \longmapsto \mathbf{P}_B(A)$ *est une probabilité sur* Ω.

Remarque 4. Comme l'application $\mathbf{P}_B : A \in \mathscr{P}(\Omega) \longmapsto \mathbf{P}_B(A)$ est une probabilité sur Ω, toutes les propriétés établies à la proposition 3 sont vérifiées par $\mathbf{P}_B$.

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 3 du chapitre 7.

□

Proposition 6. *Formule des probabilités composées.*
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 4 du chapitre 7.

□

Définition 6. *Système complet d'événements.*
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de Ω. On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est un ***système complet d'événements*** *si :*

(i) *les événements sont deux à deux incompatibles ;*

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Proposition 7. *Formule des probabilités totales.*
Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un système complet d'événements. Soit B un événement, on a :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n).$$

Si en plus on suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$, la relation précédente se réécrit en

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B) \times \mathbf{P}(A_n).$$

Démonstration. Adapter la preuve de la proposition 5 du chapitre 7.

□

Proposition 8. *Formule de Bayès.*
Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 6 du chapitre 7.

□

1.5 Indépendance d'événements

Définition 7. *Indépendance de deux événements.*
Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont ***indépendants*** *si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.*

Remarque 5. Lorsque B est de probabilité non nulle, l'indépendance de A et B est équivalente à $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.

Définition 8. *Indépendance mutuelle d'événements.*
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. On dit que les événements sont ***mutuellement indépendants*** *si*

$$\forall I \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Remarque 6. L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 4. Soit $\Omega = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme. Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{1, 4\}$.

On vérifie facilement que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ils ne sont pas mutuellement indépendants car

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C).$$

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Variables aléatoires réelles

Définition 9. *Variable aléatoire.*
*Une **variable aléatoire réelle** est une application* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.

Notation :
Si $U \subset \mathbf{R}$, on note $(X \in U)$ l'événement

$$(X \in U) = X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in U\}.$$

En particulier, $(X \leq x)$ $(x \in \mathbf{R})$ est l'événement $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}$.

Définition 10. *Image d'une variable aléatoire par une application.*
*Soit $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. On définit la **variable aléatoire image** de X par f comme la composée $f \circ X$, i.e.*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (f \circ X)(\omega) = f(X(\omega)).$$

2.2 Loi d'une variable aléatoire réelle

Proposition 9. *L'application $\mathbf{P}_X$ définie sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$ par :*

$$\forall U \in \mathbf{P}(X(\Omega)), \quad \mathbf{P}_X(U) = \mathbf{P}(X \in U)$$

est une probabilité sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$.

Démonstration. On vérifie les points (i) et (ii) de la définition 4. On a

(i) On a

$$\mathbf{P}_X(X(\Omega)) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(X(\Omega))\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

(ii) Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements deux à deux incompatibles de $X(\Omega)$. On a

$$\mathbf{P}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} X^{-1}(A_i)\right).$$

Comme les $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, les événements $X^{-1}(A_1), \ldots, X^{-1}(A_n)$ le sont aussi. Comme $\mathbf{P}$ est une probabilité de Ω, on a

$$\mathbf{P}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X \in A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_X(A_i).$$

□

Définition 11. *Loi d'une variable aléatoire.*
*La variable aléatoire $\mathbf{P}_X$ s'appelle la **loi** de X.*

Proposition 10. *La loi $\mathbf{P}_X$ est entièrement déterminée par la donnée de $\mathbf{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.*

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 8 du chapitre 7.

□

2.3 Fonction de répartition

Définition 12. *Fonction de répartition.*
On définit la fonction de répartition F_X sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

Proposition 11. *Fonction de répartition d'une variable aléatoire.*
Soit X une variable aléatoire sur Ω. On note $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. On note aussi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $p_n = \mathbf{P}(X = x_n)$, alors on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbf{N} \\ x_k \leq x}} p_k.$$

Démonstration. Adapter celle de la proposition 9 du chapitre 7.

□

Corollaire 1. *Propriétés de la fonction de répartition.*
La fonction de répartition a les propriétés suivantes :

(i) *F_X est croissante sur $\mathbf{R}$;*

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ *;*

(iii) *F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point (fonction càdlàg) ;*

(iv) *deux variables aléatoires finies suivent la même loi si, et seulement si, elles ont la même fonction de répartition.*

Démonstration. Elle est claire en utilisant la proposition 11, sauf le fait que F_X est continue à droite. Il nous faudrait un résultat supplémentaire.

□

2.4 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Dans cette sous-partie, on généralise la notion d'espérance vue au chapitre 7. Au chapitre 7, la somme était finie (car Ω l'était). Pour manipuler l'espérance de variables aléatoires définies sur un univers infini dénombrable, on a besoin de la notion de série.

Définition 13. *Espérance.*
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers dénombrable tel que $X(\Omega)$ soit infini dénombrable. On écrit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. On dit que X admet une ***espérance*** *si la série $\sum\limits_{n \geq 0} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument. Le cas échéant, on pose*

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbf{P}(X = x_n).$$

Remarque 7. (i) C'est un théorème de Riemann qui montre que si la série $\sum\limits_{n \geq 0} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument, alors toute pour toute bijection $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} x_{\varphi(n)} \mathbf{P}\left(X = x_{\varphi(n)}\right)$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbf{P}(X = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)} \mathbf{P}\left(X = x_{\varphi(n)}\right).$$

(ii) L'espérance est la moyenne théorique des valeurs prises par X.

Exemple 5. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a $n \mathbf{P}(X = n) = \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Or, la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, par comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geq 1} n \mathbf{P}(X = n)$ diverge, ainsi X n'a pas d'espérance.

Exercice 1. *Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.*

D'après le critère de d'Alembert pour les séries, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^{n+1}}$ converge (absolument), donc X admet une espérance.

Pour calculer l'espérance, on repart du développement en série entière de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$. On a

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

le rayon de convergence valant 1.

En dérivant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence, on a

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

En prenant $x = \dfrac{1}{2}$, on a

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Proposition 12. *Linéarité de l'espérance.*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers dénombrable Ω ayant chacune une espérance. Soit $a \in \mathbf{R}$. La variable aléatoire $aX + Y$ admet une espérence et on a

$$\mathbf{E}(aX + Y) = a\,\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Démonstration. Admis. Lorsque Y est une variable aléatoire constante, on peut reprendre la preuve de la proposition 11 du chapitre 7. □

Définition 14. *Variable aléatoire centrée.*

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On dit que X est ***centrée*** *si X admet une espérance et si celle-ci est nulle.*

Théorème 1. *Théorème de transfert.*

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On écrit $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Soit $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(x_n)\,\mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument. Le cas échéant, on a :

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\,\mathbf{P}(X = x_n).$$

Démonstration. Admis. □

Proposition 13. *Propriétés de l'espérance.*

Soient X et Y deux variables aléatoires ayant une espérance. Alors :

(i) *si X prend des valeurs positives, alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$ (positivité de l'espérance) ;*
(ii) *si $X \leq Y$, alors $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$ (croissance de l'espérance) ;*
(iii) *X admet une espérance et $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$.*

Démonstration. (i) C'est clair par définition de l'espérance.

(ii) La variable aléatoire $Y - X$ est positive, donc d'après (i), $\mathbf{E}(Y - X) \geq 0$. La linéarité permet de conclure.
(iii) Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire pour les sommes et le théorème de transfert. □

2.5 Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle

Définition 15. *Variance.*
*On dit que X admet une **variance** si X^2 admet une espérance. Le cas échéant, on définit $\mathbf{V}(X)$ par*

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right).$$

Remarque 8. Ainsi, par définition, $\mathbf{V}(X) \geq 0$.

Définition 16. *Écart type.*
*Si X admet une variance, on définit son **écart type**, noté $\sigma(X)$, par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.*

Proposition 14. *Formule de König-Huygens.*
Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors, on a

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 14 du chapitre 7. □

Proposition 15. *Soit X une variable aléatoire ayant une variance. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Alors*

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X).$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 15 du chapitre 7. □

Proposition 16. *Inégalité de Bienaymé-Tchebyshev.*
Soit X une variable aléatoire ayant une variance. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 16 en adaptant la preuve de l'inégalité de Markov (hors programme). □

2.6 Lois usuelles

2.6.1 Loi géométrique

Définition 17. *Loi géométrique.*
*Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit la **loi géométrique** de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et si*

$$\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad \mathbf{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Remarque 9.
(i) Une loi géométrique de paramètre p donne le rang du premier 1 dans une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.
(ii) Conséquence de la remarque précédente : l'univers est donc $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$). On peut montrer que cet ensemble **n'est pas** dénombrable. Mauvaise médecine dans un tel chapitre....

Proposition 17. *Espérance et variance d'une loi géométrique.*
Soit $p \in]0, 1[$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Démonstration. On sépare le calcul de l'espérance et celui de la variance.

Espérance. On rappelle (!) le développement en série entière de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$. On a

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et le rayon de convergence est 1.
On a aussi vu que l'on peut dériver terme à terme la série entière dans l'intervalle ouvert de convergence. Ainsi,

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}. \tag{1}$$

Ainsi, en prenant $x = 1-p \in \left]-1,1\right[$, on a

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(1-p)^{n-1}.$$

En multipliant par p, on en déduit que

$$\frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{+\infty} np\,(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbf{P}\,(X=n). \tag{2}$$

La preuve ne serait pas complète si l'on ne justifiait pas que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbf{P}\,(X=n)$ converge absolument, ce qui est le cas car elle converge et est à termes positifs.

Variance. On commence par remarquer que pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$k^2\,\mathbf{P}\,(X=k) = (k\,(k-1)+k)\,\mathbf{P}\,(X=k) = k\,(k-1)\,p\,(1-p)^{k-1} + kp\,(1-p)^{k-1}.$$

En dérivant à nouveau (1) à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, on a

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,x^{n-2}.$$

En prenant $x = 1-p \in \left]-1,1\right[$, on a

$$\frac{2}{p^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,(1-p)^{n-2}.$$

En multipliant par $p\,(1-p)$, on a

$$\frac{2\,(1-p)}{p^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,p\,(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(n-1)\,\mathbf{P}\,(X=n).$$

D'après (2), on a

$$\frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{+\infty} np\,(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbf{P}\,(X=n).$$

En additionnant les deux lignes précédentes et en utilisant la linéarité, on a

$$\frac{2\,(1-p)+p}{p^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\,\mathbf{P}\,(X=n).$$

Comme la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\,\mathbf{P}\,(X=n)$ est à termes positifs, elle converge absolument, on en déduit que X^2 admet une espérance, donc X admet une variance. D'après la formule de König-Huygens, on a

$$\mathbf{V}\,(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}\,(X)^2 = \frac{2\,(1-p)+p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

$\square$

2.6.2 Loi de Poisson

Définition 18. *Loi de Poisson.*
Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+$. Soit X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit la ***loi de Poisson*** *de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et si*

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque 10. La loi de Poisson sert souvent à mesurer le nombre d'occurences au cours d'un intervalle de temps donné , par exemple, le nombre de personnes dans une file d'attente, le nombre de défaut de crédits ou encore le nombre de noyaux radioactifs qui se désintègrent.

Proposition 18. *Espérance et variance d'une loi de Poisson.*
Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbf{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration. On sépare le calcul de l'espérance et celui de la variance.
On rappelle le développement en série entière de la fonction exp (rayon $+\infty$), on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Espérance. Pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, on a

$$k\,\mathbf{P}(X = k) = k\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

On en déduit que la série $\sum_{k \geq 0} k\,\mathbf{P}(X = k)$ converge absolument car proportionnelle à une série exponentielle. Ainsi, X admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} \quad \text{on pose } \ell = n-1 \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\mathrm{e}^{\lambda} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Variance. On commence par remarquer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$,

$$k^2\,\mathbf{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}(k(k-1) + k)\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + k\frac{\lambda^k}{k!}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

Les séries $\sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$ et $\sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ convergent absolument, donc la série $\sum_{k \geq 2} k^2\,\mathbf{P}(X = k)$ converge absolument, ainsi X^2 admet une espérance et X admet une variance. De plus

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\,\mathbf{P}\left(X=k\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} + \lambda\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda} + \lambda\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right)\right)\\
&= \lambda^2+\lambda.
\end{aligned}$$

Par la formule de König-Huygens, on a

$$\mathbf{V}\left(X\right) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}\left(X\right)^2 = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda.$$

□

Proposition 19. *Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.*

Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires qui suivent une loi binomiale de paramètre n et p_n où $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Alors,

$$\forall k\in\mathbf{N},\qquad \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(X_n=k\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Démonstration. ⚠La preuve est hors programme, elle est donnée à titre culturel.

Soit $k\in\mathbf{N}$. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(X_n=k\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Pour tout $n\geq k$,

$$\mathbf{P}\left(X_n=k\right) = \binom{n}{k}p_n^k\left(1-p_n\right)^{n-k}.$$

Déjà, pour $k\geq n$, $\displaystyle\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!n!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^n}{n!}$.

De plus, pour tout $k>\lambda$,

$$\left(1-p_n\right)^{n-k} = \left(1-p_n\right)^{-k}\exp\left(n\ln\left(1-p_n\right)\right).$$

Comme $\ln\left(1-p_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -p_n$, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-p_n\right) = -\lambda,$$

puis par continuité de la fonction exp sur $\mathbf{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln\left(1-p_n\right)\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

En remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-p_n\right)^{-k} = 1$, on obtient finalement

$$\binom{n}{k}p_n^k\left(1-p_n\right)^{k-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\mathrm{e}^{-\lambda} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(X_n=k\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

□

3 Compléments

Ces compléments sont des notions qui, sans être au programme, peuvent servir pour les concours.

3.1 Couple de variables aléatoires

Le but de cette sous-partie est d'étendre la notion de couple de variables aléatoires à des variables aléatoires prenant un nombre dénombrable de valeurs. On pourra faire le lien avec ce qui a été fait au chapitre 7.

On fixe X et Y deux variables aléatoires sur un univers Ω dénombrable. Le couple (X, Y) est un couple de variables aléatoires.

3.1.1 Généralités

Définition 19. *Loi conjointe.*

*La **loi conjointe** du couple (X, Y) est la donnée de $\mathbf{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.*

Définition 20. *Lois marginales.*

*La loi X et la loi Y s'appellent les **lois marginales** du couple (X, Y).*

Remarque 11. La loi du couple donne la loi des marginales. En effet, la formule des probabilités totales donne

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right)$$

et

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}(Y = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right).$$

⚠La réciproque est fausse : la loi des marginales **ne donne pas** la loi du couple. Nous renvoyons à la remarque 10 du chapitre 7 pour un contre-exemple.

Remarque 12. Les définitions précédentes s'étendent naturellement au n-uplet de variables aléatoires.

Exemple 6. Soit $p \in]0, 1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{N}^2, \quad \mathbf{P}(X = x \cap Y = y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-p} - p + p\,\mathrm{e}^{-p} & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ p - p\,\mathrm{e}^{-p} & \text{si } (x, y) = (0, 1) \\ p\,\mathrm{e}^{-p} & \text{si } (x, y) = (1, 1) \\ \dfrac{p^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-p} & \text{si } (x, y) = (n, 0) \text{ et } n \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On se propose de donner les lois de X et Y.

(i) *Loi de X.*

Il est clair que $X(\Omega) = \mathbf{N}$. Soit $k \in \mathbf{N}$. La formule des probabilités totales donne :

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X = k \cap Y = 0) + \mathbf{P}(X = k \cap Y = 1).$$

Cette somme se simplifie en : pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(X = k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-p} - p + p\,\mathrm{e}^{-p} + p - p\,\mathrm{e}^{-p} = \mathrm{e}^{-p} & \text{si } k = 0 \\ p\,\mathrm{e}^{-p} & \text{si } k = 1 \\ \mathrm{e}^{-p}\,\dfrac{p^k}{k!} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}.$$

Ainsi, X suit une loi de Poisson de paramètre p.

(ii) *Loi de Y.*

Il est clair que $Y(\Omega) = [\![0,1]\!]$. De plus, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbf{P}(Y=1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=1 \cap X=n) = p - p\mathrm{e}^{-p} + p\mathrm{e}^{-p} = p.$$

Ainsi, Y suit une Bernoulli de paramètre p.

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathscr{P}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Définition 21. *Loi conditionnelle.*
*Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Y=y) > 0$. La **loi conditionnelle** de X sachant $(Y=y)$ est la donnée de $\mathbf{P}_{(Y=y)}(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$.*

3.1.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 22. *Indépendance de deux variables aléatoires.*
*On dit que X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** si :*

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}((X=x) \cap (Y=y)) = \mathbf{P}(X=x) \times \mathbf{P}(Y=y).$$

Proposition 20. *On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Alors :*

(i) *pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(X(\Omega))$, on a*

$$\mathbf{P}((X,Y) \in A \times B) = \mathbf{P}(X \in A) \times \mathbf{P}(Y \in B).$$

(ii) *pour toutes applications $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes (lemme des coalitions).*

Démonstration. Admis.

□

3.1.3 Indépendance mutuelle de variables aléatoires

On fixe $n \in \mathbf{N}^\star$ et on se donne un n-uplet de variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$.

Définition 23. *Indépendance mutuelle.*
*On dit que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i).$$

Proposition 21. *On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. Alors :*

(i) *pour tout $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \cdots \times \mathscr{P}(X_n(\Omega))$, on a*

$$\mathbf{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n \in A_n).$$

(ii) *pour toutes applications $f : \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbf{R}$, les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes (lemme des coalitions).*

Démonstration. Admis.

□

Proposition 22. *Variance de la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes.*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et ayant toutes une variance. Alors, la variables aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ a une variance et

$$\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \cdots + \mathbf{V}(X_n).$$

Démonstration. Adapter la preuve de la proposition 26 du chapitre 7.

□

Proposition 23. *Stabilité des lois de Poisson.*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On suppose X et Y indépendantes et suivant respectivement des lois de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Alors, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Démonstration. On commence par donner le support : $(X+Y)(\Omega) = \mathbf{N}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, pour calculer $\mathbf{P}(X+Y=n)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=k)_{k\in\mathbf{N}}$. Ainsi, en utilisant l'indépendance de X et Y

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X+Y=n \cap X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n-k \cap X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n-k) \times \mathbf{P}(X=k).
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{P}(Y=n-k) = 0$ pour $k \geq n$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X=k)\,\mathbf{P}(Y=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu}\,\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\,\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\,\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}
\end{aligned}$$

□

On en déduit facilement le corollaire suivant en procédant par récurrence.

Corollaire 2. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

3.2 Loi de Pascal

Lemme 1. *Pour tout $r \in \mathbf{N}$, on a*

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}x^{k-r}.$$

Démonstration. On utilise le développement en série entière $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$. On a

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

On dérive cette relation r fois, ainsi

$$\frac{r!}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=r}^{+\infty}\frac{k!}{(k-r)!}x^{k-r}.$$

On conclut en divisant par $r!$ et en remarquant que $\dfrac{k!}{r!\,(k-r)!} = \dbinom{k}{r}$.

□

Définition 24. *Loi de Pascal.*

Soient $r \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X suit la ***loi de Pascal*** *de paramètres r et p si $X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$ et si :*

$$\forall k \in [\![r, +\infty[\![, \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

La définition est mal posée. S'il est clair que pour tout $k \in [\![r, +\infty[\![$, $\mathbf{P}(X = k) \geq 0$, le fait que $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$ n'est pas totalement évident. D'après le lemme 1, on a

$$\frac{1}{(1-p)^r} = \sum_{j=r-1}^{+\infty} \binom{j}{r-1} p^{j-r-1}.$$

Le changement de variable $k = j - 1$ donne

$$1 = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} p^{k-r} (1-p)^r = \sum_{k=r}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k).$$

Remarque 13. (i) Lorsque $r = 1$, on retrouve la loi géométrique.

(ii) La loi de Pascal de paramètres r et p compte le r-ième succès au cours d'une répetition d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes ayant toutes un même paramètre p.

Proposition 24. *Les lois de Pascal sont somme de lois géométriques.*

Soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1, \dots, X_r$ r ($r \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$) variables aléatoires définies sur Ω mutuellement indépendantes qui suivent toutes des lois géométriques de paramètre p.

Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Pascal de paramètres r et p.

Démonstration. On procède par récurrence. On prouve le résultat pour $r = 2$. Il est clair que $(X_1 + X_2) = [\![2, +\infty[\![$. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Pour calculer $\mathbf{P}(X_1 + X_2 = n)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k \in \mathbf{N}^\star}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}((X_1 + X_2 = n) \cap (X_1 = k)) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}((X_2 = n - k) \cap (X_1 = k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_2 = n - k) \times \mathbf{P}(X_1 = k) \quad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{n-k-1} p(1-p)^{k-1} \\
&= (n-1) p^2 (1-p)^{n-2} \\
&= \binom{n-1}{2-1} p^2 (1-p)^{n-2}.
\end{aligned}$$

On suppose le résultat vraie pour $r \in \mathbf{N}$, $r \geq N$. Soient $X_1, \dots, X_r, X_{r+1}$ $r+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et qui suivent toutes une loi géométrique de paramètre p.

Il est clair que $(X_1 + \dots + X_{r+1})(\Omega) = [\![r+1, +\infty[\![$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $X_1 + \dots + X_r$ suit une loi de Pascal de paramètres r et p. D'après la proposition 21, les variables aléatoires $X_1 + \dots + X_r$ et X_{r+1} sont indépendantes. Soit $n \in [\![r+1, +\infty[\![$. Pour calculer $\mathbf{P}(X_1 + \dots + X_{r+1} = n)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_{r+1}=k)_{k\in\mathbf{N}^\star}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(X_1+\cdots+X_{r+1}=n\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\left(X_1+\cdots+X_{r+1}=n\right)\cap\left(X_{r+1}=k\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\left(X_1+\cdots+X_{r}=n-k\right)\cap\left(X_{r+1}=k\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-r}\mathbf{P}\left(X_1+\cdots+X_{r}=n-k\right)\times\mathbf{P}\left(X_{r+1}=k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-r}\binom{n-k-1}{r-1}p^r\left(1-p\right)^{n-k-r}p\left(1-p\right)^{k-1}\\
&= p^{r+1}\left(1-p\right)^{n-(r+1)}\sum_{k=1}^{n-r}\binom{n-k-1}{r-1}\\
&= \binom{n-1}{r}p^{r+1}\left(1-p\right)^{n-(r+1)}
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-r}\binom{n-k-1}{r-1}=\binom{n-1}{r}$ (généralisation de la formule de Pascal).

Ainsi la propriété est vraie au rang $r+1$, ce qui termine la récurrence. □

Corollaire 3. *Espérance et variance d'une loi de Pascal.*

Soient $r\in\mathbf{N}^\star$ et $p\in\left]0,1\right[$. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Pascal de paramètres r et p. Alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbf{E}\left(X\right)=\frac{r}{p}\quad\textit{et}\quad\mathbf{V}\left(X\right)=\frac{r\left(1-p\right)}{p^2}.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser les propositions 12, 17, 22 et 24.

□