Chapitre 15 : Exercices

Exercice 1.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe de $\mathbf{R}^2$ d'équation $x^2 - y^2 = 0$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{C}$.

Exercice 2.

Soient $a, b > 0$. Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{E}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathscr{E}$.

Exercice 3.

Soient $a, b > 0$. Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{H}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathscr{H}$.

Exercice 4.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{H}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathscr{H}$.

Exercice 5.

Tracer les lignes de niveau et les gradients des applications suivantes.

1. $f : \begin{cases} \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto \dfrac{y}{x} \end{cases}$;
2. $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto x^2 - y^2 \end{cases}$.

Exercice 6.

Soit $\mathscr{S}$ la surface de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner en ces points une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$.

Exercice 7.

Soit $\mathscr{S}$ la surface de $\mathbf{R}^3$ d'équation $\left(x^2 + y^2 + z^2 + 3\right)^2 - 16\left(x^2 + y^2\right) = 0$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $(3, 0, 0)$.

Exercice 8.

Soit $\mathscr{S}$ la surface de $\mathbf{R}^3$ d'équation $z^3 = xy$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.

2. Déterminer les plans tangents à $\mathscr{S}$ contenant la droite D d'équation $\begin{cases} x-2 &= 0 \\ y-3z-3 &= 0 \end{cases}$.

Exercice 9.

Soit $\mathscr{S}$ le graphe de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Déterminer la position locale de $\mathscr{S}$ par rapport à son plan tangent en M.

Exercice 10.

Soit $\mathscr{S}$ le graphe de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{y}{1+x^2}$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $O = (0, 0, 0)$.
2. Déterminer la position locale de $\mathscr{S}$ par rapport à son plan tangent en O.

Exercice 11.

Soit $\mathscr{S}$ le graphe de la fonction $f : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = \ln(x) - \ln(y)$. On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Déterminer la position locale de $\mathscr{S}$ par rapport à son plan tangent en M.