Chapitre 15 : Courbes et surfaces implicites

Table des matières

1 Courbes implicites

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ non vide.

1.1 Généralités

Définition 1. *Courbe implicite.*
*La **courbe implicite** d'équation $f(x, y) = 0$ est l'ensemble des points $(x, y) \in \Omega$ tels que $f(x, y) = 0$.*

Exemple 1. (i) La courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une courbe implicite d'équation $y - g(x) = 0$.

(ii) Les coniques sont des courbes implicites.

Définition 2. *Point régulier, singulier.*
*Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x, y) = 0$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$. On dit que (x_0, y_0) est un **point régulier** si*

$$\nabla f(x_0, y_0) \neq 0.$$

*Dans le cas contraire, on dit que (x_0, y_0) est **singulier**.*

Définition 3. *Tangente.*
Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ un point régulier de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $f(x, y) = 0$. La tangente en (x_0, y_0) est la droite d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Remarque 1. (i) La tangente à $\mathscr{C}$ en un point régulier $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ est la droite orthogonale au vecteur $\nabla f(x0, y0)$ et passant par le point (x_0, y_0).

(ii) Si la courbe $\mathscr{C}$ est paramétrée par une application $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$, alors on trouve la même tangente qu'avec la définition vue pour une courbe paramétrée.

Exemple 2. Soit $\mathscr{C}$ la courbe implicite d'équation $x^2 + 3y^2 - 4 = 0$. La courbe $\mathscr{C}$ admet au point $(1, 1) \in \mathscr{C}$ une tangente $\mathscr{T}$, dont une équation est

$$(x - 1) \times 2 + (y - 1) \times 6 = 0 \iff 2x + 6y - 8 = 0.$$

1.2 Lignes de niveaux

Définition 4. *Lignes de niveaux.*
*Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. L'ensemble des points $(x, y) \in \Omega$ tels que $f(x, y) = \lambda$ est appelée **ligne de niveau** λ de l'application f.*

Remarque 2. (i) Les lignes de niveau sont utilisées sur les cartes topographiques. L'altitude est constante le long de chacune des lignes sur ces dernières, ce qui permet de représenter le relief.

(ii) On retrouve également les lignes de niveau sur les cartes de pression atmosphérique utilisées en météorologie. La pression est constante le long de chacune des lignes sur ces dernières. Dans ce contexte, les lignes de niveau sont appelées les isobares.

Proposition 1. *Le gradient est orthogonal aux lignes de niveaux et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.*

Démonstration. Admis.

□

2 Surfaces implicites

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ non vide.

2.1 Généralités

Définition 5. *Surface implicite.*
*La **surface implicite** d'équation $f(x, y, z) = 0$ est l'ensemble des points $(x, y, z) \in \Omega$ tels que $f(x, y, z) =$* 0.

Exemple 3. (i) Si $\mathscr{S}$ est la surface représentative d'une application $g : O \longrightarrow \mathbf{R}$ définie sur un ouvert O non vide de $\mathbf{R}^2$, de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\mathscr{S}$ est une surface implicite déquation $z - g(x, y) = 0$.
(ii) Les sphères sont des surfaces implicites.

Définition 6. *Point régulier, singulier.*
*Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation implicite $f(x, y, z) = 0$. On dit que $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est **régulier** si*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

*Dans le cas contraire, on dit que (x_0, y_0, z_0) est **singulier**.*

Définition 7. *Plan tangent.*
Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ un point régulier de la surface $\mathscr{C}$ d'équation $f(x, y, z) = 0$. Le plan tangent en (x_0, y_0, z_0) est le plan d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Remarque 3. Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en un point régulier $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est le plan orthogonal au vecteur $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ et passant par le point (x_0, y_0, z_0).

Exemple 4. Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$. Le plan tangent $\mathscr{P}$ à $\mathscr{S}$ au point $(1, -1, 1)$ admet pour équation $x - y + z = 3$.

2.2 Position relative entre une surface et son plan tangent

Dans cette sous-partie $g : O \longrightarrow \mathbf{R}$ où $O \subset \mathbf{R}^2$ est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$. On note $\mathscr{S}$ la surface représentative de g. Par définition $\mathscr{S}$ est la surface d'équation

$$f(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, on a

$$\nabla f(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right).$$

En particulier, le gradient de f ne s'annule pas, donc les points de $\mathscr{S}$ sont réguliers. En appliquant les résultats précédents, on en déduit que la surface $\mathscr{S}$ admet un plan tangent en chaque point $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ dont l'équation est :

$$z = (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0).$$

Nous allons à présent étudier la position relative entre la surface représentative de g et son plan tangent en un point.

Définition 8. *Position relative.*
Soit $(x_0, y_0) \in O$.

(i) *On dit que la surface $\mathscr{S}$ est **localement au-dessus** de son plan tangent au point $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ si pour tout $(x, y) \in O$ dans un voisinage de (x_0, y_0), on a*

$$g(x, y) \geq (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0).$$

(ii) *On dit que la surface $\mathscr{S}$ est **localement en-dessous** de son plan tangent au point $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ si pour tout $(x, y) \in O$ dans un voisinage de (x_0, y_0), on a*

$$g(x, y) \leq (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0).$$

Définition 9. *Soit $(x_0, y_0) \in O$. Si le plan tangent à $\mathscr{S}$ en $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ n'est ni localement au-dessus, ni localement en-dessous, on dit que la surface $\mathscr{S}$ **traverse** son plan tangent en $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$.*